Compito di Fisica Generale II dell'8 settembre 2017
Proff. S. Caprara, G. Amelino-Camelia

Esercizio 1. Si consideri la distribuzione di carica a simmetria sferica che genera in tutto lo spazio il potenziale elettrostatico

$$V(\boldsymbol{r}) = \frac{\beta\, r^2}{a^3 + r^3}$$

dove $a > 0$ e β sono parametri dimensionali, e r è la coordinata radiale sferica in un opportuno sistema di riferimento la cui origine coincide con il centro della distribuzione.

1. Si determini il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale.

2. Si determini la densità di carica $\rho(\boldsymbol{r})$ associata alla distribuzione assegnata.

3. Si calcoli la carica complessiva Q_{tot} della distribuzione assegnata.

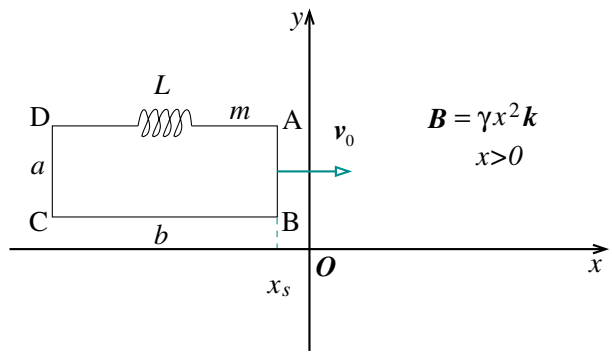

FIG. 1.

Esercizio 2. La spira rigida rettangolare ABCD, i cui lati AB e CD misurano a, mentre i lati BC e DA misurano b, ha massa m, autoinduttanza L e resistenza elettrica trascurabile ($R = 0$). La spira è vincolata a muoversi di moto traslatorio sul piano xy, mantenendo i lati paralleli agli assi di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Il moto traslatorio avviene parallelamente all'asse x, di modo che la posizione della spira è individuata univocamente dell'ascissa x_s comune a tutti i punti del lato AB, come mostrato in FIG. 1. La spira, che ha inizialmente velocità $\boldsymbol{v}_0 = v_0\, \boldsymbol{i}$, con $v_0 > 0$, giunge all'istante $t = 0$ alla frontiera del semipiano $x > 0$, nel quale è presente un campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B} = \gamma\, x^2\, \boldsymbol{k}$, per $x > 0$, dove γ è un parametro dimensionale. Il campo è perpendicolare al piano xy. I simboli $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{k}$ rappresentano, rispettivamente, i versori degli assi x e z. All'istante $t = 0$ nella spira non circola corrente.

1. Si esprima il flusso del campo $\boldsymbol{B}$ concatenato con la spira in funzione della posizione della spira, $\Phi(x_s)$, distinguendo i tre casi $x_s \leq 0$, $0 < x_s < b$, e $x_s \geq b$.

2. Si determini l'intensità della corrente indotta nella spira in funzione della posizione della spira, $i(x_s)$, distinguendo i tre casi del punto precedente. Si riferisca il segno di i al verso di percorrenza della spira coerente con la normale $\boldsymbol{k}$.

3. Si determini il massimo valore x_s^M dell'ascissa di x_s, raggiunto prima che la spira inverta il moto. Nel rispondere a questa domanda si assuma che b sia sufficientemente grande, affinché la spira non entri completamente nel semipiano $x > 0$ (cioè risulti sempre $x_s < b$). Fissato b, per quali valori di v_0 ciò è verificato?.

Soluzione del compito di Fisica Generale II del 14 giugno 2017
Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Esercizio 1.

1. Il campo elettrico è radiale, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, e la componente radiale del campo è

$$E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{\beta r(r^3 - 2a^3)}{(a^3 + r^3)^2}.$$

2. Per la legge di Gauss la densità di carica è

$$\rho(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{\epsilon_0 \beta}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2 E_r(r)\right] = \frac{6\epsilon_0\beta(2r^3 - a^3)}{(a^3 + r^3)^3},$$

dove si è usata l'espressione della divergenza in coordinate sferiche e il fatto che la componente radiale del campo dipende solo da r.

3. La carica totale è

$$Q_{tot} = \int_0^\infty \rho(r)\, 4\pi r^2\, \mathrm{d}r = 24\pi\epsilon_0\beta a^3 \int_0^\infty \frac{r^2(2r^3 - a^3)}{(a^3 + r^3)^3}\, \mathrm{d}r = 8\pi\epsilon_0 \int_0^\infty \frac{2w - 1}{(1 + w)^3}\, \mathrm{d}w = 4\pi\epsilon_0\beta,$$

dove si è usato il cambio di variabile $w = r^3/a^3$. Al risultato si poteva arrivare più semplicemente osservando che il potenziale assegnato tende per grandi r a quello di un monopolo di carica $4\pi\epsilon_0\beta$.

Esercizio 2.

1. Il flusso cercato vale $\Phi(x_s) = 0$, per $x_s \leq 0$,

$$\Phi(x_s) = \gamma a \int_0^{x_s} x^2\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\gamma a x_s^3, \qquad \text{per } 0 < x_s < b,$$

e

$$\Phi(x_s) = \gamma a \int_{x_s - b}^{x_s} x^2\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}\gamma a b \left(3x_s^2 - 3bx_s + b^2\right), \qquad \text{per } x_s \geq b.$$

2. Applicando l'equazione del circuito $0 = f_{ind} + f_{auto} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi - L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}i$, si trova che la quantità $Li + \Phi$ è costante nel tempo. Poiché per $t = 0$ si ha $x_s = 0$ e $\Phi(x_s = 0) = 0$, l'intensità di corrente è

$$i(x_s) = -\frac{1}{L}\Phi(x_s) = \begin{cases} 0, & \text{per } x_s \leq 0, \\ -\dfrac{\gamma a}{3L} x_s^3, & \text{per } 0 < x_s < b \\ -\dfrac{\gamma a b}{3L}(3x_s^2 - 3bx_s + b^2), & \text{per } x_s \geq b. \end{cases}$$

3. Poiché l'energia (somma dell'energia cinetica della spira e dell'energia immagazzinata nella corrente) è conservata e la corrente iniziale è zero si ha $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$. Per $x_s = x_s^M$ la velocità si annulla e si ha

$$\left[i(x_s^M)\right]^2 = \frac{m}{L}v_0^2.$$

Concordemente con le ipotesi poste dal problema, si può usare per $i(x_s^M)$ l'espressione valida quando $x_x^M < b$, da cui si ricava

$$x_s^M = \left(\frac{3v_0\sqrt{mL}}{|\gamma|a}\right)^{1/3}.$$

Imponendo ora $x_s^M < b$, si ricava $v_0 < |\gamma|ab^3/(3\sqrt{mL})$.