Compito di Fisica Generale II del 15 febbraio 2017
Proff. S. Caprara, G. Amelino-Camelia

Esercizio 1. Si consideri la distribuzione di carica a simmetria sferica che genera in tutto lo spazio il potenziale elettrostatico

$$V(r) = \frac{A}{4\pi\epsilon_0}\frac{r}{r^2+a^2},$$

dove $a > 0$ e A sono parametri dimensionali, e r è la coordinata radiale sferica di un opportuno sistema di riferimento la cui origine coincide con il centro della distribuzione.

1. Determinare il campo elettrostatico $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ generato in tutto lo spazio dalla distribuzione assegnata. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{r}}$ il versore radiale.

2. Determinare la densità di carica $\rho(r)$ associata alla distribuzione assegnata.

3. Determinare la carica totale Q_{tot} associata alla distribuzione assegnata.

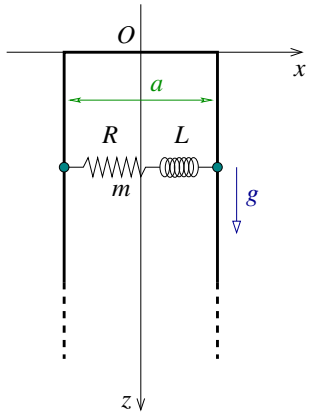

FIG. 1.

Esercizio 2. Una sbarra conduttrice di massa m, lunghezza a, e resistenza elettrica R, è libera di scorrere senza attrito lungo due guide conduttrici verticali di resistenza elettrica trascurabile, mantenendosi orizzontale. Le due guide sono collegate da un tratto conduttore di lunghezza a, e resistenza elettrica trascurabile. L'autoinduttanza complessiva del circuito formato dalla sbarra, dalle due guide, e dal tratto di collegamento vale L (in figura essa è rappresentata come se fosse concentrata in un punto del circuito). È fissato un sistema di riferimento cartesiano ortogonale, con l'asse z verticale, diretto verso il basso, e l'asse x orizzontale e parallelo alla sbarra, come in figura. Il sistema è immerso in un campo d'induzione magnetica uniforme $\boldsymbol{B} = \beta\,\hat{\boldsymbol{y}}$, dove $\hat{\boldsymbol{y}}$ è il versore dell'asse y, e nel campo di gravità, con accelerazione $\boldsymbol{g} = g\,\hat{\boldsymbol{z}}$, dove $g > 0$ e $\hat{\boldsymbol{z}}$ è il versore dell'asse z. All'istante $t = 0$ la velocità della sbarra è nulla e nel circuito non circola corrente.

1. Scrivere le equazioni differenziali che determinano l'evoluzione della componente v della velocità della sbarra nel verso positivo dell'asse z (cioè tale che $\boldsymbol{v} = v\,\hat{\boldsymbol{z}}$), e dell'intensità i della corrente che circola nel circuito, per $t > 0$. Riferire il segno di i al verso di percorrenza del circuito concorde con la normale $\hat{\boldsymbol{y}}$.

2. Assumendo che le guide siano sufficientemente lunghe, determinare (con i segni appropriati) i valori asintotici della velocità, v_∞, e dell'intensità di corrente, i_∞.

3. Nel caso limite di campo d'induzione magnetica intenso, $\beta^2 \gg mR^2/(4La^2)$, determinare la costante di tempo τ che governa il rilassamento esponenziale di v e i al loro valore asintotico.

Soluzione del compito di Fisica Generale II del 26 febbraio 2016
Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Esercizio 1.

1. Il campo è puramente radiale, $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = E_r(r)\hat{\boldsymbol{r}}$, con componente radiale

$$E_r(r) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}(r) = \frac{A}{4\pi\epsilon_0}\frac{r^2-a^2}{(r^2+a^2)^2}.$$

2. Per il teorema di Gauss $\rho(\boldsymbol{r}) = \epsilon_0 \operatorname{div} \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, ed essendo il campo radiale

$$\rho(r) = \frac{\epsilon_0}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[r^2 E_r(r)\right] = \epsilon_0\left[\frac{\mathrm{d}E_r}{\mathrm{d}r}(r) + \frac{2}{r}E_r(r)\right] = \frac{Aa^2}{2\pi r}\frac{3r^2-a^2}{(r^2+a^2)^3}.$$

3. La carica totale cercata è

$$Q_{tot} = \int_0^\infty \rho(r)\,4\pi r^2\,\mathrm{d}r = 2Aa^2\int_0^\infty \frac{3r^2-a^2}{(r^2+a^2)^3}\,r\,\mathrm{d}r = A\int_0^\infty \frac{3s-1}{(s+1)^3}\,\mathrm{d}s = A$$

dove si è usato il cambio di variabile $s = r^2/a^2$. A tale risultato si può giungere anche osservando che, per grandi r,

$$V(r) \approx \frac{A}{4\pi\epsilon_0 r}$$

è il potenziale di un monopolo di carica $Q_{tot} = A$.

Esercizio 2.

1. La variazione del flusso Φ concatenato con il circuito è $\dot{\Phi} = -\beta a v$, per cui l'equazione del circuito è

$$-\beta a v - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - Ri = 0,$$

che va risolta insieme all'equazione del moto della spira

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg + \beta a i,$$

in cui l'ultimo termine è la componente z della forza esercitata dal campo magnetico sulla sbarra. Si ottiene quindi il sistema di due equazioni differenziali del primo ordine

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= -\frac{R}{L}i - \frac{\beta a}{L}v\\ \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= g + \frac{\beta a}{m}i\end{aligned}$$

con condizioni iniziali $i(t=0) = 0$, $v(t=0) = 0$.

2. Il sistema ammette soluzioni particolari costanti, che coincidono con i valori asintotici cercati

$$i_\infty = -\frac{mg}{\beta a}, \qquad v_\infty = -\frac{R}{\beta a}i_\infty = \frac{mgR}{\beta^2 a^2}.$$

Il segno di i_∞ è opposto al segno di β, v_∞ è ovviamente sempre positiva.

3. Ricavando la velocità dalla prima equazione si ottiene

$$v = -\frac{R}{\beta a}i - \frac{L}{\beta a}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},$$

che, sostituito nella seconda, dà

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\tau_L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau_L \tau_R}(i - i_\infty) = 0,$$

con $1/\tau_L = R/L$ e $1/\tau_R = (\beta a)^2/(mR)$ [alternativamente, ricavando i dalla seconda equazione e sostituendo nella prima, si ottiene per v la medesima equazione (con v_∞ al posto di i_∞)]. La soluzione dell'equazione è la somma della soluzione generale dell'equazione omogenea e della soluzione particolare, $i(t) = i_{omog}(t) + i_\infty$, con $i_{omog}(t)$ che si annulla esponenzialmente per grandi t, di modo che $i(t) \to i_\infty$. Le radici del polinomio caratteristico sono infatti

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\tau_L} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau_L^2} - \frac{4}{\tau_R \tau_L}}\right) = -\frac{1}{2\tau_L}\left(1 \mp \sqrt{1 - \frac{4\tau_L}{\tau_R}}\right)$$

e hanno entrambe parte reale negativa (corrispondente ad un decadimento esponenziale). Nel regime di campo magnetico intenso si ha che $\tau_L \gg \tau_R$, di modo che sotto radice compare una quantità negativa (a cui corrisponde la parte oscillante della soluzione dell'equazione omogenea) e

$$\lambda_\pm \approx -\frac{1}{2\tau_L} \mp \frac{\iota}{\sqrt{\tau_L \tau_R}},$$

con ι unità immaginaria. La parte reale dà l'inverso del tempo caratteristico cercato, di modo che $\tau = 2\tau_L = 2L/R$.