FISICA MATEMATICA
Prova scritta del 5 febbraio 2018

Cognome, nome, matricola ....

Esercizio 1. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) - \partial_x[t(1-2x)u(x,t)] = 0, \\ u(x,t_0) = x+1. \end{cases}$$

Sia A_{t_0} l'intervallo $(0,1)$. Determinare $|A_0|$.

EDO associata

$$\begin{cases} \dot{x} = -t(1-2x), \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad \text{Soluzione: } x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2x_0 - 1)e^{t^2 - t_0^2} \Rightarrow \text{FLUSSO}$$

$$\varphi^{t,t_0}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2x-1)e^{t^2-t_0^2}$$

· Camp vettorial $F(x,t) = -t(1-2x)$; $\operatorname{div} F(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} F(x,t) = 2t$

· $u(x,t) = u_0(\varphi^{t_0,t}(x))\, e^{-\int_{t_0}^t ds \operatorname{div} F(\varphi^{s,t}(x), s)}$ dove $u_0(x) = u(x,t_0) = x+1$

da cui

$$u(x,t) = \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}(2x-1)e^{t_0^2-t^2} \right) e^{-(t^2-t_0^2)} = \frac{3}{2} e^{t_0^2-t^2} + \frac{1}{2}(2x-1)e^{2(t_0^2-t^2)}$$

· ~~Rava vR~~ Usando il corollario del teorema di Liouville

$$\frac{d}{dt}|A_t| = \int_{A_t} dt \operatorname{div} F(x,t) = \int_{A_t} dx\, 2t \Rightarrow \frac{d}{dt}|A_t| = 2t\,|A_t|;$$

Soluzione: $|A_t| = |A_{t_0}|\, e^{t^2-t_0^2}$; poiché $|A_{t_0}| = 1$

$$\Rightarrow |A_0| = e^{-t_0^2}$$

Esercizio 2. Risolvere con il metodo di Fourier il problema di Cauchy-Dirichlet

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) + f(x,t) & (x,t) \in (0,1)\times\mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = 0, \quad \partial_t u(x,0) = \sin(2\pi x)\cos(2\pi x) & \forall x \in [0,1], \\ u(0,t) = u(1,t) = 0 \quad \forall t \geq 0, \end{cases}$$

per
(i) $f(x) = 0$;
(ii) $f(x) = x\sin(\pi x)t$. Discutere la regolarità della soluzione.

Cerco una soluzione della forma $u(x,t) = \sum_{m\geq 1} \sin(m\pi x)\, W_m(t)$

(i) $W_m(t)$ risolve $\ddot{W}_m(t) = -2\pi^2 m^2\, W_m(t)$;

dai dati iniziali $u(x,0)=0$, $\partial_t u(x,0) = \sin(2\pi x)\cos(2\pi x) = \frac{1}{2}\sin(4\pi x)$

deduco che $W_m(0) = 0 \ \forall m \geq 1$, $\dot{W}_m(0) = 0 \ \forall m \neq 4$, $\dot{W}_4(0) = \frac{1}{2}$,

~~Soluzione~~: ovvero ~~u(x,t)~~) $W_m(t) = 0 \ \forall m \neq 4$, $W_4(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{8}\frac{1}{\pi}\sin(4\sqrt{2}\pi t)$.

Soluzione: $u_1(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{8}\frac{1}{\pi}\sin(4\sqrt{2}\pi t)\sin(4\pi x)$

(ii) $u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t)$, dove u_2 è soluz. del problema con forzante f e dati iniziali nulli.

~~Suppongo di poter~~ Sviluppo la $f(x,t)$ in serie di sin

$$f(x,t) = \sum_{n\geq 1}\hat{f}_n(t)\sin(n\pi x), \quad \text{dove } \hat{f}_n(t) = 2\int_0^1 dx\, f(x,t)\sin(n\pi x).$$

~~Espandi~~ Facendo i calcoli

$$\hat{f}_m(t) = 2t\int_0^1 dy\, \sin(\pi y)\sin(n\pi y) = t\int_0^1 dy\, y\,[\cos((m-1)\pi y) - \cos((m+1)\pi y)]$$

da cui $\hat{f}_1(t) = \frac{t}{2}$; $\hat{f}_n(t) = 0$ per n dispari, $n\neq 1$; $\hat{f}_n(t) = -\frac{8t}{\pi^2}\frac{m}{(m^2-1)^2}$ per n pari

- $u_2(x,t) = \sum_{n\geq 1} W_m(t)\sin(m\pi x)$ dove $W_n(t) = 0$ per n dispari, $n\neq 1$;

~~penso~~ per gli altri n $\begin{cases} \ddot{W}_n(t) = -\omega_n^2 W_n(t) + a_n t \\ W_n(0) = \dot{W}_n(0) = 0 \end{cases}$

dove $a_1 = \frac{1}{2}$; $a_n = -\frac{8}{\pi^2}\frac{n}{(n^2-1)^2}$ per n pari

$\Rightarrow$ $W_m(t) = -\frac{a_n}{\omega_n^3}\sin(\omega_n t) + \frac{a_n}{\omega_n^2}t$ per n pari e $n=1$;

Soluzione: $u_2(x,t) = -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\sin(\sqrt{2}\pi t) - t\right]\sin(\pi x)$

$$+\frac{8}{\pi^2}\sum_{\substack{n>1\\ n \text{ pari}}}\frac{1}{2\pi^2}\frac{1}{m(m^2-1)^2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}\pi}\frac{1}{n}\sin(\sqrt{2}\pi n t) - t\right]\sin(m\pi x)$$

REGOLARITA': u è derivabile con continuità 3 volte rispetto a x e 4 volte rispetto a t.

Esercizio 3. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) = 3\Delta u(x,t) & (x,t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}_+ \\ u(x,0) = (1+|x|^2)e^{-|x|^2}, \partial_t u(x,0) = 0 & \forall x \in \mathbb{R}^3, \end{cases}$$

determinare la soluzione per $x = 0, t > 0$.

La soluzione in $x=0$ è data dalla formula di Kirchhoff calcolata in $x=0$, ovvero

$$u(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{4\pi c^4 t} \int_{\partial B_{ct}(0)} d\sigma(y)\, (1+|y|^2) e^{-|y|^2} \right] \qquad \text{con } c^2=3$$

$$\cdot \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial B_{ct}(0)} d\sigma(y)\, (1+|y|^2)e^{-|y|^2} = \frac{1}{4\pi c^2 t}(1+c^2t^2)e^{-c^2t^2} |\partial B_{ct}(0)|$$

$$= t\,(1+c^2t^2)e^{-c^2t^2}$$

$$\Rightarrow u(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left\{ t(1+c^2t^2)e^{-c^2t^2} \right\} = e^{-c^2t^2}\left\{1+c^2t^2-2c^4t^4\right\}$$

$\Rightarrow$ SOLUZIONE:

$$u(0,t) = e^{-3t^2}\left\{1+3t^2-18t^4\right\}$$

Altro modo (più difficile): sfrutto la simmetria radiale e passo in coordinate sferiche

$$u(x,t) = u(|x|,t)\,; \quad W(r,t) := r\,u(r,t) \quad \Rightarrow \begin{cases} \partial^2_{tt} W = 3\,\partial^2_{rr} W & \text{in } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \\ W(r,0) = r(1+r^2)e^{-r^2}\,; & \partial_t W(r,0) = 0 \end{cases}$$

· $W(0,t)=0 \Rightarrow$ prolungo per disparità su tutto $\mathbb{R}$ e uso D'Alembert

$$W(r,t) = \frac{1}{2}\Big\{(r-\sqrt{3}t)[1+(r-\sqrt{3}t)^2]e^{-(r-\sqrt{3}t)^2} + (r+\sqrt{3}t)[1+(r+\sqrt{3}t)^2]e^{-(r+\sqrt{3}t)^2}\Big\}$$

$$u(r,t) = \frac{W(r,t)}{r} = \frac{1}{2}\frac{1}{r}\, r \Big\{[1+(r-\sqrt{3}t)^2]e^{-(r-\sqrt{3}t)^2} + [1+(r+\sqrt{3}t)^2]e^{-(r+\sqrt{3}t)^2}\Big\}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{r}\sqrt{3}t\Big\{[1+(r-\sqrt{3}t)^2]e^{-(r-\sqrt{3}t)^2} - [1+(r+\sqrt{3}t)^2]e^{-(r+\sqrt{3}t)^2}\Big\}$$

$$= \frac{1}{2}\Big\{[1+(r-\sqrt{3}t)^2]e^{-(r-\sqrt{3}t)^2} + [1+(r+\sqrt{3}t)^2]e^{-(r+\sqrt{3}t)^2}\Big\} - \frac{1}{2}\frac{1}{r}\sqrt{3}t\Big\{(r^2-2r\sqrt{3}t)e^{-(r-\sqrt{3}t)^2} - (r^2+2\sqrt{3}tr)e^{-(r+}$$

$$-\frac{1}{2}\frac{1}{r}\sqrt{3}t\, e^{-(r^2+3t^2)}\Big\{(1+3t^2)e^{2r\sqrt{3}t} - (1+3t^2)e^{-2\sqrt{3}t}\Big)\Big\}$$

$$\lim_{r\to 0} u(r,t) = \frac{1}{2}e^{-3t^2}(2+6t^2) - \frac{1}{2}e^{-3t^2}(-12t^2) - 6t^2(1+3t^2)e^{-3t^2} = e^{-3t^2}(1+3t^2-18t^4)$$

Esercizio 4. Sia Ω la corona circolare $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : 1 < |x| < 2\}$. Risolvere l'equazione di Poisson

$$\begin{cases} \Delta u + |x|^2(2 - |x|^2) = 0 & \forall x \in \Omega \\ u(x) = 0 & \forall x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

- $u(x) = u(|x|)$; in coordinate polari

$$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r u'(r)\right) + r^2(2 - r^2) = 0 & \forall r \in (1, 2) \\ u(1) = u(2) = 0 \end{cases}$$

$v(r) := r u'(r)$, $v'(r) + r^3(2 - r^2) = 0 \Rightarrow v(r) = \frac{r^6}{6} - \frac{1}{2}r^4 + C_0$

$u'(r) = \frac{v(r)}{r} = \frac{r^5}{6} - \frac{1}{2}r^3 + \frac{C_0}{r} \Rightarrow u(r) = \frac{r^6}{36} - \frac{r^4}{8} + C_0 \ln r + C_1$

$u(1) = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{1}{8} - \frac{1}{36} \Rightarrow u(r) = \frac{1}{36}(r^6 - 1) - \frac{1}{8}(r^4 - 1) + C_0 \ln r$

$u(2) = 0 \Rightarrow$ $C_0 = +\frac{1}{8}\frac{1}{\ln 2}$

Soluzione: $u(x) = \frac{1}{36}(|x|^6 - 1) - \frac{1}{8}(|x|^4 - 1) + \frac{1}{8}\frac{\ln|x|}{\ln 2}$