ANALISI VETTORIALE: ESERCIZI PRIMA SETTIMANA

F. LANZARA, E. MONTEFUSCO, P. VERNOLE
07102016

Esercizio 1. Disegnare nel piano gli insiemi seguenti e riconoscere se sono aperti o chiusi e se sono limitati o meno.

$$E_1 = \left\{(x,y); x^2+y^2-4y<0\right\} \cap \{|x|>1/2\}$$
$$E_2 = \{(x,y); 0<x+y<4\} \cap \{y \neq x/2\}$$
$$E_3 = \left\{(x,y); x^2+y^2/9<1\right\}$$

Esercizio 2.

$$f(x,y) = \frac{arctg(x^2-xy)}{x^2(x^2-y^2)}$$

determinare il dominio e calcolare, se esistono, i limiti di $f(x,y)$ per $(x,y) \longrightarrow (0,0)$ e per $(x,y) \longrightarrow (1,1)$.

Esercizio 3. Data la funzione

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x)(e^{xy}-1)}{\sqrt{x^2+y^2}} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

si risponda alle seguenti questioni:
i. f è continua in (0,0)?
ii. f è derivabile parzialmente in (0,0)?
iii. f è differenziabile in (0,0)?
iv. calcolare, se esiste, la derivata direzionale di $f(x,y)$ nel punto $(0,0)$ e nella direzione $(1/2, \sqrt{3}/2)$.

Esercizio 4. Data la curva

$$\underline{r}(t) = (e^t \sin(t), e^t \cos(t)) \qquad t \in [0, \pi/2]$$

stabilire se la curva è regolare e/o chiusa. Trovare se esiste la retta tangente al sostegno di $\underline{r}$ nel punto corrispondente al valore $t = \pi/4$. Calcolare la lunghezza della curva.

Esercizio 5. Calcolare la lunghezza della curva di equazione

$$y = (1-x^{2/3})^{3/2}, \quad x \in [0,1] \qquad \text{(asteroide)}$$

Esercizio 6. Calcolare la lunghezza della curva di equazione polare

$$\rho = 2(1+\cos(\theta)), \quad \theta \in [-\pi, \pi] \qquad \text{(cardioide)}$$

Esercizio 7. Sia $f(x, y) = x^2 + y^2$.
i. Calcolare le derivate direzionali $\frac{\partial f}{\partial v}$ nel punto $(1, 1)$ al variare di v
ii. Determinare per quali v riesce massimo $\left|\frac{\partial f}{\partial v}\right|$.

Esercizio 8. Data la funzione

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{x^2 y}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

i. Dire se è continua,
ii. calcolare le derivate parziali nei punti $(x, y) \neq (0, 0)$,
iii. calcolare, servendosi dei giusti rapporti incrementali, le derivate parziali in $(0, 0)$,
iv. usando la definizione, studiare la differenzibilità di f in $(0, 0)$.

Esercizio 9. Dati $a, b, c \in \mathbf{R}$, sia f definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos(x + y) - 1 & x + y < 0 \\ ax + by + c & x + y \geq 0 \end{cases}$$

Per quali a, b, c la funzione f è continua in $\mathbf{R}^2$?

Esercizio 10. Sia $f(x, y) = \sin(x^2 + y^4) + xy$ e sia assegnata la curva di rappresentazione parametrica

$$\phi(t) = (a_1 t^3 + b_1, a_2 t^2 + b_2, a_3 t + b_3)$$

Si determinino i parametri a_i, b_i $(i = 1, 2, 3)$, per i quali
i. la curva passa per il punto $(0, 0, 0)$ per $t = 0$,
ii. in tale punto la retta tangente alla curva appartiene al piano tangente al grafico di f.