Compito di Fisica Generale II del 19 gennaio 2017

Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

Esercizio 1. Si consideri una condensatore piano le cui armature, di superficie S, sono disposte perpendicolarmente all'asse x di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale. Un'armatura giace sul piano $x = 0$ e reca la carica Q, l'altra giace sul piano $x = d > 0$ e reca la carica $-Q$ (v. FIG. 1 a). Tra le armature del condensatore è presente un dielettrico la cui costante dielettrica relativa varia lungo l'asse x secondo la legge

$$\epsilon_r(x) = \frac{2}{1 - \dfrac{x^4}{3d^4}}, \qquad 0 \leq x \leq d.$$

1. Si determinino la capacità C del condensatore e la differenza di potenziale ΔV tra le due armature.

2. Assunto lo zero del potenziale sull'armatura giacente sul piano $x = 0$, si determinino il potenziale elettrostatico $V(x)$ ed il campo elettrico $\boldsymbol{E}(x)$ nella regione di spazio compresa tra le due armature. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{x}}$ il versore dell'asse x.

3. Si determinino le densità superficiali delle cariche di polarizzazione in prossimità delle due armature, σ_0^p e σ_d^p, e la densità di volume $\rho^p(x)$ delle cariche di polarizzazione in seno al dielettrico.

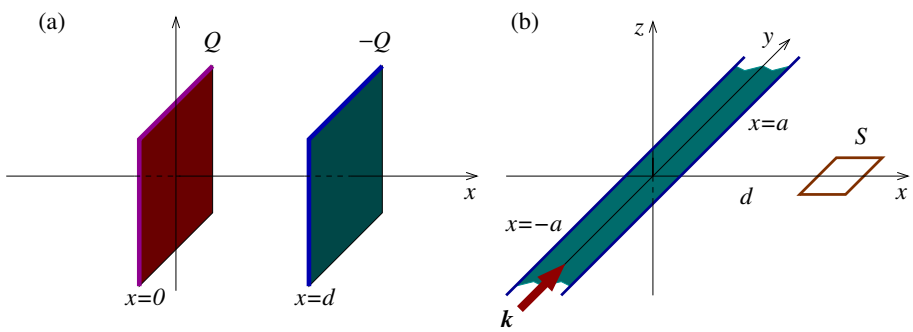

FIG. 1.

Esercizio 2. Si consideri una striscia piana indefinita di larghezza $2a$, disposta sul piano xy di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale, e parallela all'asse y, di modo che i due bordi della striscia siano le rette $x = -a$ e $x = a$. La striscia è percorsa da una corrente che scorre nella direzione dell'asse y, con una densità per unità di sezione lineare $\boldsymbol{k} = \kappa(x)\hat{\boldsymbol{y}}$, dove $\hat{\boldsymbol{y}}$ è il versore dell'asse y e

$$\kappa(x) = \frac{3\lambda}{4a^3}\left(a^2 - x^2\right), \qquad -a \leq x \leq a,$$

con $a > 0$ e λ parametri dimensionali (v. FIG. 1 b).

1. Si determini l'intensità i della corrente che scorre nella striscia.

2. Si determini il campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}(x)$ generato dalla distribuzione di corrente assegnata, in ogni punto dell'asse x. Si indichi con $\hat{\boldsymbol{z}}$ è il versore dell'asse z. L'espressione ottenuta permette di conoscere il campo $\boldsymbol{B}(x, y)$ in ogni punto del piano xy?

3. Si supponga ora che $\lambda = \lambda_0 \sin(\omega t)$ sia una grandezza alternata con pulsazione ω e che sul piano xy sia presente una spira piana di superficie S e dimensioni trasversali trascurabili rispetto alla sua distanza $d \gg a$ dall'asse y (di modo da poter trascurare la variazione del campo di induzione magnetica $\boldsymbol{B}$ lungo la spira). Assegnando alla spira il verso di percorrenza concorde con la normale $\hat{\boldsymbol{z}}$, si calcoli la forza elettromotrice f indotta nella spira.

Soluzione

Esercizio 1.

1. La capacità del condensatore è tale che

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{\epsilon_0 S}\int_0^d \frac{1}{\epsilon_r(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{7d}{15\epsilon_0 S} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{15\epsilon_0 S}{7d}.$$

Allora

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{7Qd}{15\epsilon_0 S}.$$

2. Si ha

$$V(x) = -\frac{Q}{\epsilon_0 S}\int_0^x \frac{1}{\epsilon_r(\xi)}\,\mathrm{d}\xi = -\frac{Qx}{2\epsilon_0 S}\left(1 - \frac{x^4}{15d^4}\right).$$

e

$$\boldsymbol{E}(x) = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}(x)\,\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{Q}{2\epsilon_0 S}\left(1 - \frac{x^4}{3d^4}\right)\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{Q}{\epsilon_0\epsilon_r(x)S}\,\hat{\boldsymbol{x}}.$$

3. Il vettore di polarizzazione è

$$\boldsymbol{P}(x) = \epsilon_0\left[\epsilon_r(x) - 1\right]\boldsymbol{E}(x) = \frac{Q}{S}\left[1 - \frac{1}{\epsilon_r(x)}\right]\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{Q}{S}\left(\frac{1}{2} + \frac{x^4}{6d^4}\right)\hat{\boldsymbol{x}}.$$

Allora

$$\sigma_0^p = \boldsymbol{P}(x=0)\cdot(-\hat{\boldsymbol{x}}) = -\frac{Q}{2S}, \qquad \sigma_d^p = \boldsymbol{P}(x=d)\cdot\hat{\boldsymbol{x}} = \frac{2Q}{3S},$$

mentre

$$\rho^p(x) = -\mathrm{div}\,\boldsymbol{P}(x) = -\frac{Q}{S}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{2} + \frac{x^4}{6d^4}\right) = -\frac{2Qx^3}{3Sd^4}.$$

Esercizio 2.

1. Si ha

$$i = \int_{-a}^{a}\kappa(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3\lambda}{2a^3}\int_0^a\left(a^2 - x^2\right)\,\mathrm{d}x = \lambda.$$

2. Decomponendo la striscia in tanti fili paralleli di larghezza infinitesima $\mathrm{d}x$, percorsi da corrente $\kappa(x)\,\mathrm{d}x$ e applicando la legge di Biot-Savart si ha

$$\boldsymbol{B}(x) = \frac{\mu_0\hat{\boldsymbol{z}}}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\kappa(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - x} = \frac{3\lambda\mu_0\hat{\boldsymbol{z}}}{8\pi a^3}\int_{-a}^{a}\frac{a^2 - \xi^2}{\xi - x}\,\mathrm{d}\xi = \frac{3\lambda\mu_0\hat{\boldsymbol{z}}}{8\pi a^3}\left[\left(a^2 - x^2\right)\ln\left|\frac{a-x}{a+x}\right| - 2ax\right].$$

Tale espressione è valida in ogni punto del piano xy, dal momento che la scelta dell'origine lungo l'asse y è arbitraria.

3. Per $d \gg a$ si ha

$$\boldsymbol{B}(x=d) \approx -\frac{\mu_0\lambda}{2\pi d}\,\hat{\boldsymbol{z}}.$$

che corrisponde alla legge di Biot-Savart per un filo percorso da corrente di intensità $i = \lambda$. Trascurando la variazione di $\boldsymbol{B}$ lungo la spira si trova che il flusso con essa concatenato vale

$$\Phi = -\frac{\mu_0 \lambda S}{2\pi d},$$

di modo che

$$f = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 S}{2\pi d}\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 \lambda_0 \omega S}{2\pi d}\cos(\omega t).$$