Prova in itinere di Fisica Generale II

del 12 gennaio 2017

Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

La spira quadrata ABCD, di lato a, massa m, e resistenza elettrica R, si muove di moto traslatorio nel piano Π che la contiene, mantenendo i lati AB e BC paralleli rispettivamente agli assi y e x di un opportuno sistema di riferimento cartesiano ortogonale Oxy fissato su Π. La velocità della spira è inizialmente $\boldsymbol{v}_i = (v_0, 0, 0)$, con $v_0 > 0$. All'istante $t = 0$ la spira giunge alla frontiera del semispazio $x > 0$, dove è presente un campo di induzione magnetica uniforme, perpendicolare al piano Π, $\boldsymbol{B} = (0, 0, \beta)$. Si identifichi la posizione della spira con l'ascissa x_s comune a tutti i punti del lato AB e si indichi con $v = \dot{x}_s$ la componente della generica velocità della spira lungo l'asse x. Si adotti per la spira il verso di percorrenza indicato in figura e si scelga la normale alla spira coerente con tale verso.

1. Si determinino il flusso Φ del campo di induzione magnetica attraverso la spira in funzione di x_s, e la forza elettromotrice f indotta nella spira in funzione di x_s e v, riferendo il segno delle due quantità al verso di percorrenza e alla normale adottati per la spira.

2. Sapendo che la velocità iniziale $\boldsymbol{v}_i$ è tale da permettere alla spira di entrare completamente nel semispazio $x > 0$ e che la velocità finale della spira è $\boldsymbol{v}_f = (v_\infty, 0, 0)$, con $v_\infty = \frac{1}{3} v_0$, si determinino il tempo t^* impiegato dalla spira per entrare completamente nel semispazio $x > 0$ e la velocità iniziale v_0 della spira. Si ponga $\tau = \frac{mR}{(\beta a)^2}$.

3. Si determini l'intensità $i(t)$ della corrente indotta che circola nella spira per $t > 0$, riferendo il suo segno al verso di percorrenza adottato per la spira.

4. Si determini l'energia $\mathcal{E}$ complessivamente dissipata nella spira per effetto Joule.

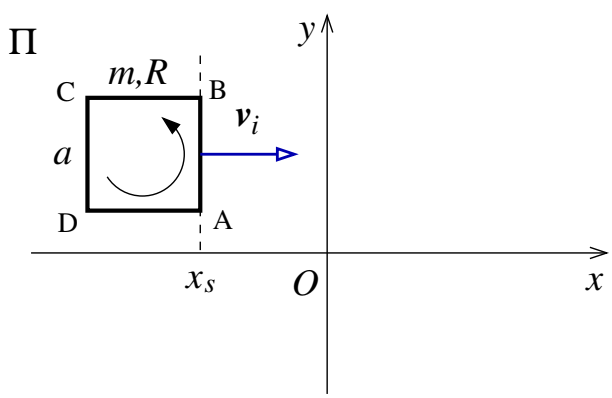

FIG. 1.

Soluzione della prova in itinere di Fisica Generale II

del 12 gennaio 2017

Proff. G. Amelino-Camelia e S. Caprara

1. Si ha $\Phi = 0$, per $x_s \leq 0$, $\Phi = \beta a x_s$, per $0 < x_s < a$, e $\Phi = \beta a^2$ per $x \geq a$. Allora, per la legge di Faraday-Neumann-Lenz, $f = 0$, per $x_s \leq 0$, $f = -\beta a v$, per $0 < x_s < a$, e $f = 0$ per $x_s \geq a$.

2. Per $x_s \leq 0$ e $x_s \geq a$ sulla spira non agiscono forze e la velocità si mantiene costante e vale, rispettivamente, $v = v_0$ e $v = v_\infty = \frac{1}{3}v_0$. La forza che agisce sulla spira quando $0 < x_s < a$ ha componente $F_x = \beta a i$, dove $i = f/R$ è l'intensità della corrente indotta. L'equazione del moto della spira per $0 < x_s < a$ è quindi $m\dot{v} = F_x = -(\beta a)^2 v/R$, ovvero

$$\dot{v} = -\frac{v}{\tau}.$$

La soluzione con la condizione iniziale data è $v(t) = v_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$ e, sapendo che per $t = t^*$ deve essere $v = v_\infty = \frac{1}{3}v_0$, si ha

$$\frac{1}{3} = \mathrm{e}^{-t^*/\tau} \qquad \Rightarrow \qquad t^* = \tau \ln 3 = \frac{mR\ln 3}{(\beta a)^2}.$$

Integrando ancora, con la condizione iniziale assegnata, si trova $x_s(t) = v_0\tau\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)$ e, sapendo che per $t = t^*$ deve essere $x_s = a$, si ha

$$a = v_0\tau\left(1 - \frac{1}{3}\right) \qquad \Rightarrow \qquad v_0 = \frac{3a}{2\tau} = \frac{3\beta^2 a^3}{2mR}.$$

3. Per $t \leq 0$ e $t \geq t^*$, nella spira non circola corrente. Per $0 < t < t^*$ si ha

$$i(t) = -\frac{\beta a v(t)}{R} = -\frac{\beta a v_0}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau} = -\frac{3\beta a^2}{2R\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau}.$$

4. L'energia dissipata per effetto Joule è

$$\mathcal{E} = \int_0^{t^*} R\,[i(t)]^2\,\mathrm{d}t = \frac{9\beta^2 a^4}{4R\tau^2}\int_0^{t^*}\mathrm{e}^{-2t/\tau}\,\mathrm{d}t = \frac{9\beta^2 a^4}{8R\tau}\left(1 - \mathrm{e}^{-2t^*/\tau}\right) = \frac{\beta^2 a^4}{R\tau} = \frac{\beta^4 a^6}{mR^2}.$$

Tale risultato può essere ottenuto anche calcolando la variazione di energia cinetica della spira

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}mv_\infty^2 = \frac{4}{9}mv_0^2 = \frac{ma^2}{\tau^2} = \frac{\beta^4 a^6}{mR^2}.$$