Matricola

Cognome

Nome

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Seconda prova in itinere – 15 gennaio 2016 – **I**

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sará assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

1. Siano $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt$.

1A	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	**V**	F
1B	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-x}{g(x)} = 0$	V	**F**
1C	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x^3} = \dfrac{1}{2}$	**V**	F
1D	l'equazione della retta tangente il grafico di $g(f(x))$ nel punto di ascissa $x = 0$ é $y = x$	V	**F**

3. Siano $P(x) = 1 + x^2$ ed $f(x) = e^x - \log(1 + x)$.

3A	P é il polinomio di Taylor di grado 2 e centro in $x_0 = 0$ di f	**V**	F
3B	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-P(x)}{x^2} = 0$	**V**	F
3C	$f(x) = P(x) + o(x^3)$	V	**F**
3D	per ogni $x > 0$, esiste $\xi \in (0, x)$ tale che $f(x) - 1 = x\left(e^{\xi} - \frac{1}{1+\xi}\right)$	**V**	F

2. Sia $\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-2, 0) \\ -2 & x \in [0, 1) \\ 3 & x \in [1, 2] \end{cases}$; $F(x) := \int_{-1}^{x} \phi(s)\,ds$.

2A	F è continua in $[-2, 2]$	**V**	F
2B	F è derivabile in $[-2, 2]$	V	**F**
2C	$F(1) = 2$	V	**F**
2D	$\exists \xi \in [0, 2] : \phi(\xi) = \dfrac{(F(2) - F(0))}{2}$	V	**F**

4. Sia $F(x) = \int_0^x \log(1 + t^2)\,dt$.

4A	F è decrescente in $\mathbb{R}$	V	**F**
4B	F è dispari	**V**	F
4C	$F(1) = \frac{\pi}{2} - 2 + \log 2$	**V**	F
4D	il polinomio di Taylor di F di grado 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P(x) = -x$	V	**F**

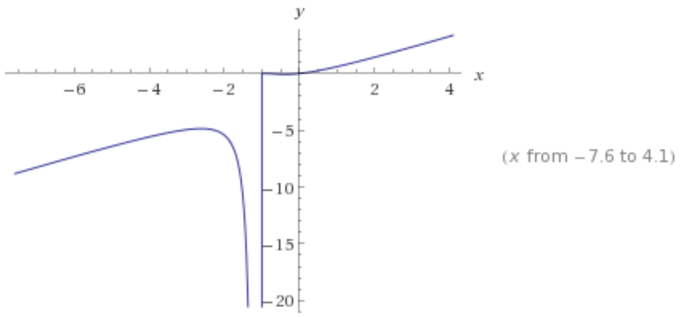

Figura 1: grafico di f

5. Data $f(x) = 2xe^{-\frac{1}{1+x}}$, studiare:

(i) dominio e segno di f

(ii) limiti negli estremi del dominio e continuità di f

(iii) derivabilità, monotonia ed estremi relativi ed assoluti di f

(iv) convessità e grafico di f

Soluzione.
(i) L'unica operazione in f che non è sempre definita è la divisione $1/(1+x)$. Di conseguenza, il dominio di f è

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}.$$

Dato che la funzione esponenziale assume valori positivi, concludiamo inoltre che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.
(ii] In quanto prodotto di funzioni continue, f è continua in D_f. Inoltre $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} 1/(1+x) = 0$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

È poi evidente che $\lim_{x\longrightarrow -1^\pm} 1/(1+x) = \pm\infty$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\longrightarrow -1^+} f(x) = 0.$$

(iii) Un calcolo esplicito mostra che

$$f'(x) = \frac{x^2+3x+1}{(1+x)^2} e^{-\frac{1}{1+x}}.$$

Di conseguenza,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+3x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Risulta quindi che i punti $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ed $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ sono, rispettivamente, di massimo e di minimo relativo per f.
Dato che f è illimitata sia dall'alto che dal basso, come mostrato in (ii), non esistono punti di estremo assoluto.
(iv) Un ulteriore calcolo esplicito mostra che

$$f''(x) = \frac{3x+2}{(1+x)^4} e^{-\frac{1}{1+x}}.$$

Deduciamo che

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x+2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{2}{3}.$$

La funzione f è dunque convessa in $[-2/3, +\infty)$ e non convessa altrove.
Il grafico di f quindi quello mostrato in figura 1.

6. Data l'equazione differenziale

$$u'' + 4u' + 5u = 4\cos t \qquad (*)$$

(i) trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $(*)$

(ii) trovare tutte le soluzioni di $(*)$

(iii) trovare tutte le soluzioni limitate di $(*)$

(iv) trovare tutte le soluzioni di $(*)$ tali che $u(0) = \frac{1}{2}$, $u'(0) = 1$.

Soluzione.
(i) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5,$$

le cui due radici (complesse e coniugate) sono $\lambda_{12} := -2 \pm i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono quindi tutte e sole della forma

$$u_0(t) = e^{-2t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right].$$

(ii) Per trovare una soluzione particolare di $(*)$, cerchiamo $z(t) \in \mathbb{C}$ tale che

$$z'' + 4z' + 5z = 4e^{it}, \qquad z(t) = \eta e^{it}.$$

Derivando, otteniamo $z' = i\eta e^{it}$, $z'' = -\eta e^{it}$, per cui imponiamo che

$$-\eta + 4i\eta + 5\eta = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \frac{4}{4(1+i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Deduciamo che $u(t) = \Re z(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ è una soluzione di $(*)$ e quindi le soluzioni di $(*)$ sono tutte e sole della forma

$$u(t) = e^{-2t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right] + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t). \qquad (1)$$

(iii) Dato che la funzione e^{-2t} è illimitata, l'unica soluzione limitata di $(*)$ è tale che $c_1 = c_2 = 0$ ovvero

$$u(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t).$$

(iv) Derivando in (1) otteniamo

$$u'(t) = e^{-2t}[(c_2 - 2c_1)\cos t - (c_1 + 2c_2)\sin t] + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t),$$

da cui $u(0) = c_1 + \frac{1}{2}$, $u'(0) = c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2}$. Imponendo le condizioni iniziali richieste otteniamo dunque

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, da cui otteniamo la soluzione richiesta

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\sin t + \cos t + \sin t\right].$$

Matricola

Cognome

Nome

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Seconda prova in itinere – 15 gennaio 2016 – **II**

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sará assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

1. Siano $P(x) = 1 + x^2$ ed $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x + 1$.

1A	P é il polinomio di Taylor di grado 2 e centro in $x_0 = 0$ di f	**V**	F
1B	$\forall x > 0$, esiste $\xi \in (0, x)$tale che $f(x) - 1 = x\left(\xi e^{\frac{\xi^2}{2}} + \sin \xi\right)$	**V**	F
1C	$f(x) = P(x) + o(x^3)$	**V**	F
1D	$\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0$	**V**	F

3. Sia $F(x) = \int_0^x t \arctan t \, dt$.

3A	il polinomio di Taylor di F di grado 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P(x) = \pi x$	V	**F**
3B	F è decrescente in $\mathbb{R}$	V	**F**
3C	$F(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	**V**	F
3D	F è pari	V	**F**

2. Siano $f(x) = x \sin x$, $g(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt$.

2A	$\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	**V**	F
2B	$\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x^3} = 1$	**V**	F
2C	$\lim_{x \longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - x}{g(x)} = 0$	V	**F**
2D	l'equazione della retta tangente il grafico di $g(f(x))$ nel punto di ascissa $x = 0$ é $y = x$	V	**F**

4. Sia $\phi(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-2, 0) \\ 2 & x \in [0, 1) \\ -3 & x \in [1, 2] \end{cases}$; $F(x) := \int_{-1}^x \phi(s) \, ds$.

4A	F è derivabile in $[-2, 2]$	V	**F**
4B	F è discontinua in $x = 0$	V	**F**
4C	$F(1) = 1$	**V**	F
4D	esiste $\xi \in [-1, 0]$ tale che $\phi(\xi) = \frac{1}{2}(F(0) - F(-1))$	V	**F**

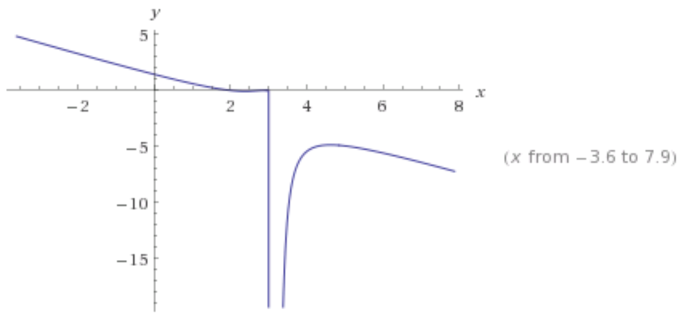

Figura 2: grafico di f

5. Data $f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{x-3}}$, studiare:

(i) dominio e segno di f

(ii) limiti negli estremi del dominio e continuità di f

(iii) derivabilità, monotonia ed estremi relativi ed assoluti di f

(iv) convessità e grafico di f

Soluzione.
(i) L'unica operazione in f che non è sempre definita è la divisione $1/(x-3)$. Di conseguenza, il dominio di f è

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}.$$

Dato che la funzione esponenziale assume valori positivi, concludiamo inoltre che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.
(ii] In quanto prodotto di funzioni continue, f è continua in D_f. Inoltre $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} 1/(x-3) = 0$, da cui

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

È poi evidente che $\lim_{x \longrightarrow 3^\pm} 1/(x-3) = \pm\infty$, da cui

$$\lim_{x \longrightarrow 3^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \longrightarrow 3^+} f(x) = -\infty.$$

(iii) Un calcolo esplicito mostra che

$$f'(x) = -\frac{x^2 - 7x + 11}{(x-3)^2} e^{\frac{1}{x-3}}.$$

Di conseguenza,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 7x + 11 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{7}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right].$$

Risulta quindi che i punti $x = \frac{7}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ed $x = \frac{7}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ sono, rispettivamente, di minimo e di massimo relativo per f. Dato che f è illimitata sia dall'alto che dal basso, come mostrato in (ii), non esistono punti di estremo assoluto.
(iv) Un ulteriore calcolo esplicito mostra che

$$f''(x) = \frac{8 - 3x}{(x-3)^4} e^{\frac{1}{x-3}}.$$

Deduciamo che

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8 - 3x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{8}{3}.$$

La funzione f è dunque convessa in $(-\infty, 8/3]$ e non convessa altrove.
Il grafico di f quindi quello mostrato in figura 2.

6. Data l'equazione differenziale

$$u'' + 6u' + 10u = 13\cos t \qquad (*)$$

(i) trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $(*)$

(ii) trovare tutte le soluzioni di $(*)$

(iii) trovare tutte le soluzioni limitate di $(*)$

(iv) trovare tutte le soluzioni di $(*)$ tali che $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

Soluzione.
(i) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 10,$$

le cui due radici (complesse e coniugate) sono $\lambda_{12} := -3 \pm i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono quindi tutte e sole della forma

$$u_0(t) = e^{-3t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right].$$

(ii) Per trovare una soluzione particolare di $(*)$, cerchiamo $z(t) \in \mathbb{C}$ tale che

$$z'' + 6z' + 10z = 13e^{it}, \qquad z(t) = \eta e^{it}.$$

Derivando, otteniamo $z' = i\eta e^{it}$, $z'' = -\eta e^{it}$, per cui imponiamo che

$$-\eta + 6i\eta + 10\eta = 13 \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \frac{13}{3(3+2i)} = 1 - \frac{2i}{3}.$$

Deduciamo che $u(t) = \Re z(t) = \cos t + \frac{2}{3}\sin t$ è una soluzione di $(*)$ e quindi le soluzioni di $(*)$ sono tutte e sole della forma

$$u(t) = e^{-3t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right] + \cos t + \frac{2}{3}\sin t \qquad (2)$$

(iii) Dato che la funzione e^{-3t} è illimitata, l'unica soluzione limitata di $(*)$ è tale che $c_1 = c_2 = 0$ ovvero

$$u(t) = \cos t + \frac{2}{3}\sin t.$$

(iv) Derivando in (2) otteniamo

$$u'(t) = e^{-3t}[(c_2 - 3c_1)\cos t - (c_1 + 3c_2)\sin t] - \sin t + \frac{2}{3}\cos t,$$

da cui $u(0) = c_1 + 1$, $u'(0) = c_2 - 3c_1 + \frac{2}{3}$. Imponendo le condizioni iniziali richieste otteniamo dunque

$$\begin{cases} c_1 + 1 = 0 \\ c_2 - 3c_1 + \frac{2}{3} = 1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $c_1 = -1$, $c_2 = -\frac{8}{3}$, da cui otteniamo la soluzione richiesta

$$u(t) = e^{-3t}\left[-\cos t - \frac{8}{3}\sin t\right] + \cos t + \frac{2}{3}\sin t.$$

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Seconda prova in itinere – 15 gennaio 2016 – **III**

Matricola

Cognome

Nome

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sará assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

1. Siano $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt$.

1A	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-x}{g(x)} = 0$	V	**F**
1B	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x^3} = \dfrac{1}{2}$	**V**	F
1C	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	**V**	F
1D	l'equazione della retta tangente il grafico di $g(f(x))$ nel punto di ascissa $x = 0$ é $y = x$	V	**F**

2. Sia $\phi(x) = \begin{cases} -2 & x \in [-2,0) \\ 1 & x \in [0,1) \\ 2 & x \in [1,2] \end{cases}$; $F(x) := \int_{-1}^x \phi(s)\, ds$.

2A	F è continua in $[-2,2]$	**V**	F
2B	F è derivabile in $x = 1$	V	**F**
2C	$F(2) = 0$	V	**F**
2D	esiste $\xi \in [0,2]$ tale che $\phi(\xi) = \frac{1}{2}(F(2) - F(0))$	V	**F**

3. Siano $P(x) = 1 + x^2$ ed $f(x) = e^{-x} - \log(1-x)$.

3A	P é il polinomio di Taylor di grado 2 e centro in $x_0 = 0$ di f	**V**	F
3B	per ogni $x > 0$, esiste $\xi \in (0,x)$ tale che $f(x) - 1 = x\left(e^{\xi} + \frac{1}{1-\xi}\right)$	V	**F**
3C	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-P(x)}{x^2} = 0$	**V**	F
3D	$f(x) - P(x) = o(x^3)$	V	**F**

4. Sia $F(x) = \int_0^x \log(1+t^2)\, dt$.

4A	F è crescente in $\mathbb{R}$	**V**	F
4B	$F(1) = \frac{\pi}{2} - 2 + \log 2$	**V**	F
4C	F è pari	V	**F**
4D	il polinomio di Taylor di F di grado 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P(x) = 2x$	V	**F**

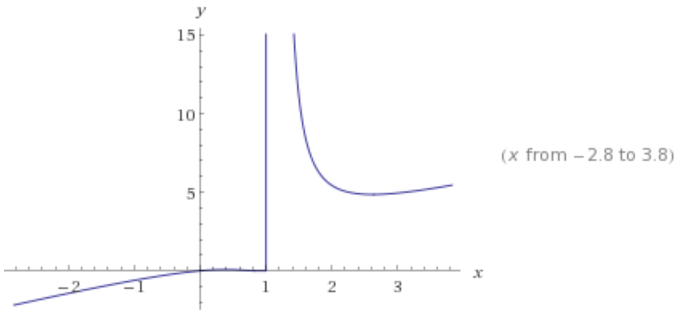

Figura 3: grafico di f

5. Data $f(x) = xe^{\frac{1}{x-1}}$, studiare:

(i) dominio e segno di f

(ii) limiti negli estremi del dominio e continuità di f

(iii) derivabilità, monotonia ed estremi relativi ed assoluti di f

(iv) convessità e grafico di f

Soluzione.
(i) L'unica operazione in f che non è sempre definita è la divisione $1/(x-1)$. Di conseguenza, il dominio di f è

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}.$$

Dato che la funzione esponenziale assume valori positivi, concludiamo inoltre che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.
(ii] In quanto prodotto di funzioni continue, f è continua in D_f. Inoltre $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} 1/(x-1) = 0$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

È poi evidente che $\lim_{x\longrightarrow 1^\pm} 1/(x-1) = \pm\infty$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

(iii) Un calcolo esplicito mostra che

$$f'(x) = \frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}.$$

Di conseguenza,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Risulta quindi che i punti $x = \frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ed $x = \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ sono, rispettivamente, di massimo e di minimo relativo per f. Dato che f è illimitata sia dall'alto che dal basso, come mostrato in (ii), non esistono punti di estremo assoluto.
(iv) Un ulteriore calcolo esplicito mostra che

$$f''(x) = \frac{3x-2}{(x-1)^4}e^{\frac{1}{x-1}}.$$

Deduciamo che

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{2}{3}.$$

La funzione f è dunque convessa in $[2/3, 1)$ e in $(1, +\infty)$ e non convessa altrove.
Il grafico di f quindi quello mostrato in figura 3.

6. Data l'equazione differenziale

$$u'' + 4u' + 5u = 4\sin t \qquad (*)$$

(i) trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $(*)$

(ii) trovare tutte le soluzioni di $(*)$

(iii) trovare tutte le soluzioni limitate di $(*)$

(iv) trovare tutte le soluzioni di $(*)$ tali che $u(0) = -\frac{1}{2}$, $u'(0) = 1$.

Soluzione.
(i) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5,$$

le cui due radici (complesse e coniugate) sono $\lambda_{12} := -2 \pm i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono quindi tutte e sole della forma

$$u_0(t) = e^{-2t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right].$$

(ii) Per trovare una soluzione particolare di $(*)$, cerchiamo $z(t) \in \mathbb{C}$ tale che

$$z'' + 4z' + 5z = 4e^{it}, \qquad z(t) = \eta e^{it}.$$

Derivando, otteniamo $z' = i\eta e^{it}$, $z'' = -\eta e^{it}$, per cui imponiamo che

$$-\eta + 4i\eta + 5\eta = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \frac{4}{4(1+i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Deduciamo che $u(t) = \Im z(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$ è una soluzione di $(*)$ e quindi le soluzioni di $(*)$ sono tutte e sole della forma

$$u(t) = e^{-2t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right] + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t). \qquad (3)$$

(iii) Dato che la funzione e^{-2t} è illimitata, l'unica soluzione limitata di $(*)$ è tale che $c_1 = c_2 = 0$ ovvero

$$u(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t).$$

(iv) Derivando in (3) otteniamo

$$u'(t) = e^{-2t}[(c_2 - 2c_1)\cos t - (c_1 + 2c_2)\sin t] + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t),$$

da cui $u(0) = c_1 - \frac{1}{2}$, $u'(0) = c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2}$. Imponendo le condizioni iniziali richieste otteniamo dunque

$$\begin{cases} c_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, da cui otteniamo la soluzione richiesta

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\sin t + \sin t - \cos t\right].$$

Matricola

Cognome

Nome

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Seconda prova in itinere – 15 gennaio 2016 – **IV**

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sará assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

1. Siano $f(x) = x \sin x$, $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

1A $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ V F

1B $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-x}{g(x)} = 0$ V F

1C $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x^3} = 1$ V F

1D l'equazione della retta tangente il grafico di $g(f(x))$ nel punto di ascissa $x = 0$ é $y = x$ V F

3. Sia $\phi(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-2,0) \\ -2 & x \in [0,1) \\ 3 & x \in [1,2] \end{cases}$; $F(x) := \int_{-1}^x \phi(s)\,ds$.

3A F è derivabile in $x = \frac{1}{2}$ V F

3B F è discontinua in $x = \frac{1}{2}$ V F

3C $F(1) = 1$ V F

3D esiste $\xi \in [-1,0]$ tale che $\phi(\xi) = \frac{1}{2}(F(0) - F(-1))$ V F

2. Siano $P(x) = 1 + x^2$ ed $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x + 1$.

2A P é il polinomio di Taylor di grado 2 e centro in $x_0 = 0$ di f V F

2B $\forall x > 0$, esiste $\xi \in (0,x)$ tale che $f(x) - 1 = x\left(\xi e^{\frac{\xi^2}{2}} + \sin\xi\right)$ V F

2C $f(x) = P(x) + o(x^3)$ V F

2D $\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)-P(x)}{x^2} = 0$ V F

4. Sia $F(x) = \int_0^x t \arctan t\,dt$.

4A il polinomio di Taylor di F di grado 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P(x) = \pi x$ V F

4B F è crescente in $\mathbb{R}$ V F

4C F è dispari V F

4D $F(1) = 0$ V F

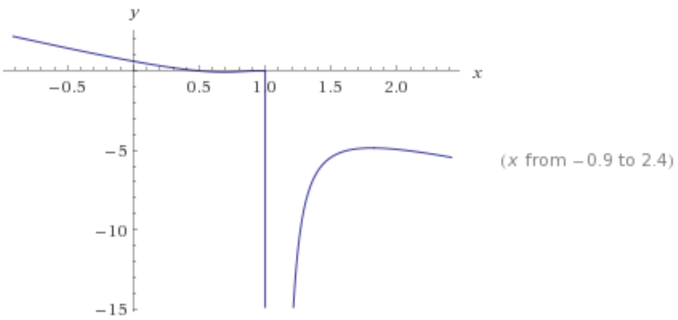

Figura 4: grafico di f

5. Data $f(x) = (1 - 2x)e^{\frac{1}{2(x-1)}}$, studiare:

(i) dominio e segno di f

(ii) limiti negli estremi del dominio e continuità di f

(iii) derivabilità, monotonia ed estremi relativi ed assoluti di f

(iv) convessità e grafico di f

Soluzione.
(i) L'unica operazione in f che non è sempre definita è la divisione $1/2(x-1)$. Di conseguenza, il dominio di f è

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}.$$

Dato che la funzione esponenziale assume valori positivi, concludiamo inoltre che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1/2$.
(ii] In quanto prodotto di funzioni continue, f è continua in D_f. Inoltre $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} 1/2(x-1) = 0$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

È poi evidente che $\lim_{x\longrightarrow 1^{\pm}} 1/2(x-1) = \pm\infty$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

(iii) Un calcolo esplicito mostra che

$$f'(x) = -\frac{4x^2 - 10x + 5}{2(x-1)^2} e^{\frac{1}{2(x-1)}}.$$

Di conseguenza,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 - 10x + 5 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right).$$

Risulta quindi che i punti $x = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$ ed $x = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ sono, rispettivamente, di minimo e di massimo relativo per f. Dato che f è illimitata sia dall'alto che dal basso, come mostrato in (ii), non esistono punti di estremo assoluto.
Il grafico di f quindi quello mostrato in figura 4.

6. Data l'equazione differenziale

$$u'' + 6u' + 10u = 13\sin t \qquad (*)$$

(i) trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $(*)$

(ii) trovare tutte le soluzioni di $(*)$

(iii) trovare tutte le soluzioni limitate di $(*)$

(iv) trovare tutte le soluzioni di $(*)$ tali che $u(0) = 0$, $u'(0) = -1$.

Soluzione.
(i) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 10,$$

le cui due radici (complesse e coniugate) sono $\lambda_{12} := -3 \pm i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono quindi tutte e sole della forma

$$u_0(t) = e^{-3t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right].$$

(ii) Per trovare una soluzione particolare di $(*)$, cerchiamo $z(t) \in \mathbb{C}$ tale che

$$z'' + 6z' + 10z = 13e^{it}, \qquad z(t) = \eta e^{it}.$$

Derivando, otteniamo $z' = i\eta e^{it}$, $z'' = -\eta e^{it}$, per cui imponiamo che

$$-\eta + 6i\eta + 10\eta = 13 \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \frac{13}{3(3+2i)} = 1 - \frac{2i}{3}.$$

Deduciamo che $u(t) = \Im z(t) = \sin t - \frac{2}{3}\cos t$ è una soluzione di $(*)$ e quindi le soluzioni di $(*)$ sono tutte e sole della forma

$$u(t) = e^{-3t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right] + \sin t - \frac{2}{3}\cos t \qquad (4)$$

(iii) Dato che la funzione e^{-3t} è illimitata, l'unica soluzione limitata di $(*)$ è tale che $c_1 = c_2 = 0$ ovvero

$$u(t) = \sin t - \frac{2}{3}\cos t.$$

(iv) Derivando in (4) otteniamo

$$u'(t) = e^{-3t}[(c_2 - 3c_1)\cos t - (c_1 + 3c_2)\sin t] + \cos t + \frac{2}{3}\sin t,$$

da cui $u(0) = c_1 - \frac{2}{3}$, $u'(0) = c_2 - 3c_1 + 1$. Imponendo le condizioni iniziali richieste otteniamo dunque

$$\begin{cases} c_1 - \frac{2}{3} = 0 \\ c_2 - 3c_1 + 1 = -1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = 0$, da cui otteniamo la soluzione richiesta

$$u(t) = -e^{-3t}\frac{2}{3}\cos t + \sin t - \frac{2}{3}\cos t.$$

Matricola

Cognome

Nome

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Seconda prova in itinere – 15 gennaio 2016 – **V**

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sará assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

1. Siano $P(x) = 1 + x^2$ ed $f(x) = e^x - \log(1 + x)$.

1A	P é il polinomio di Taylor di grado 2 e centro in $x_0 = 0$ di f	V	F
1B	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0$	V	F
1C	$f(x) = P(x) + o(x^3)$	V	F
1D	per ogni $x > 0$, esiste $\xi \in (0, x)$ tale che $f(x) - 1 = x\left(e^\xi - \frac{1}{1+\xi}\right)$	V	F

3. Siano $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$.

3A	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	V	F
3B	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - x}{g(x)} = 0$	V	F
3C	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x^3} = \dfrac{1}{2}$	V	F
3D	l'equazione della retta tangente il grafico di $g(f(x))$ nel punto di ascissa $x = 0$ é $y = x$	V	F

2. Sia $\phi(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-2, 0) \\ -2 & x \in [0, 1) \\ 3 & x \in [1, 2] \end{cases}$; $F(x) := \int_{-1}^x \phi(s)\, ds$.

2A	F è continua in $[-2, 2]$	V	F
2B	F è derivabile in $[-2, 2]$	V	F
2C	$F(1) = 2$	V	F
2D	$\exists \xi \in [0, 2] : \phi(\xi) = \dfrac{(F(2) - F(0))}{2}$	V	F

4. Sia $F(x) = \int_0^x \log(1 + t^2)\, dt$.

4A	F è decrescente in $\mathbb{R}$	V	F
4B	F è dispari	V	F
4C	$F(1) = \frac{\pi}{2} - 2 + \log 2$	V	F
4D	il polinomio di Taylor di F di grado 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P(x) = -x$	V	F

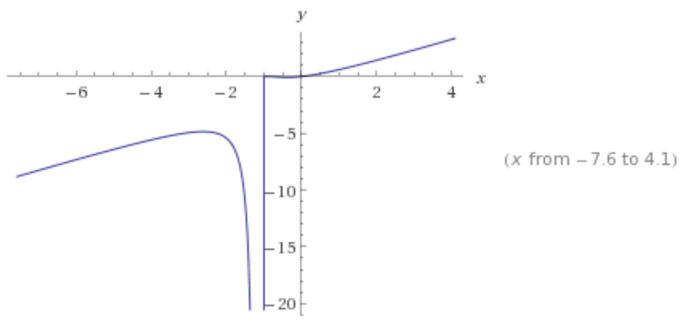

Figura 5: grafico di f

5. Data $f(x) = 2xe^{-\frac{1}{1+x}}$, studiare:

(i) dominio e segno di f

(ii) limiti negli estremi del dominio e continuità di f

(iii) derivabilità, monotonia ed estremi relativi ed assoluti di f

(iv) convessità e grafico di f

Soluzione.
(i) L'unica operazione in f che non è sempre definita è la divisione $1/(1+x)$. Di conseguenza, il dominio di f è

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq -1\}.$$

Dato che la funzione esponenziale assume valori positivi, concludiamo inoltre che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.
(ii] In quanto prodotto di funzioni continue, f è continua in D_f. Inoltre $\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} 1/(1+x) = 0$, da cui

$$\lim_{x \longrightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

È poi evidente che $\lim_{x \longrightarrow -1^{\pm}} 1/(1+x) = \pm\infty$, da cui

$$\lim_{x \longrightarrow -1^-} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x \longrightarrow -1^+} f(x) = 0.$$

(iii) Un calcolo esplicito mostra che

$$f'(x) = \frac{x^2 + 3x + 1}{(1+x)^2} e^{-\frac{1}{1+x}}.$$

Di conseguenza,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 3x + 1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \left(-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Risulta quindi che i punti $x = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ed $x = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ sono, rispettivamente, di massimo e di minimo relativo per f. Dato che f è illimitata sia dall'alto che dal basso, come mostrato in (ii), non esistono punti di estremo assoluto.
(iv) Un ulteriore calcolo esplicito mostra che

$$f''(x) = \frac{3x + 2}{(1+x)^4} e^{-\frac{1}{1+x}}.$$

Deduciamo che

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x + 2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq -\frac{2}{3}.$$

La funzione f è dunque convessa in $[-2/3, +\infty)$ e non convessa altrove.
Il grafico di f quindi quello mostrato in figura 1.

6. Data l'equazione differenziale

$$u'' + 4u' + 5u = 4\cos t \qquad (*)$$

(i) trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $(*)$

(ii) trovare tutte le soluzioni di $(*)$

(iii) trovare tutte le soluzioni limitate di $(*)$

(iv) trovare tutte le soluzioni di $(*)$ tali che $u(0) = \frac{1}{2}$, $u'(0) = 1$.

Soluzione.
(i) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5,$$

le cui due radici (complesse e coniugate) sono $\lambda_{12} := -2 \pm i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono quindi tutte e sole della forma

$$u_0(t) = e^{-2t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right].$$

(ii) Per trovare una soluzione particolare di $(*)$, cerchiamo $z(t) \in \mathbb{C}$ tale che

$$z'' + 4z' + 5z = 4e^{it}, \qquad z(t) = \eta e^{it}.$$

Derivando, otteniamo $z' = i\eta e^{it}$, $z'' = -\eta e^{it}$, per cui imponiamo che

$$-\eta + 4i\eta + 5\eta = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \frac{4}{4(1+i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Deduciamo che $u(t) = \Re z(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t)$ è una soluzione di $(*)$ e quindi le soluzioni di $(*)$ sono tutte e sole della forma

$$u(t) = e^{-2t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right] + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t). \qquad (1)$$

(iii) Dato che la funzione e^{-2t} è illimitata, l'unica soluzione limitata di $(*)$ è tale che $c_1 = c_2 = 0$ ovvero

$$u(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \sin t).$$

(iv) Derivando in (1) otteniamo

$$u'(t) = e^{-2t}[(c_2 - 2c_1)\cos t - (c_1 + 2c_2)\sin t] + \frac{1}{2}(\cos t - \sin t),$$

da cui $u(0) = c_1 + \frac{1}{2}$, $u'(0) = c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2}$. Imponendo le condizioni iniziali richieste otteniamo dunque

$$\begin{cases} c_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, da cui otteniamo la soluzione richiesta

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-2t}\sin t + \cos t + \sin t\right].$$

Matricola

Cognome

Nome

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Seconda prova in itinere – 15 gennaio 2016 – **VI**

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sará assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

1. Sia $F(x) = \int_0^x t \arctan t \, dt$.

1A	il polinomio di Taylor di F di grado 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P(x) = \pi x$	V	**F**
1B	F è crescente in $\mathbb{R}$	**V**	F
1C	F è pari	V	**F**
1D	$F(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	**V**	F

2. Siano $P(x) = 1 + x^2$ ed $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x + 1$.

2A	P é il polinomio di Taylor di grado 2 e centro in $x_0 = 0$ di f	**V**	F
2B	$\forall x > 0$, esiste $\xi \in (0, x)$ tale che $f(x) - 1 = x\left(\xi e^{\frac{\xi^2}{2}} + \sin \xi\right)$	**V**	F
2C	$f(x) = P(x) + o(x^3)$	**V**	F
2D	$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0$	**V**	F

3. Siano $f(x) = x \sin x$, $g(x) = \int_0^x e^{t^2} \, dt$.

3A	$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	**V**	F
3B	$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x^3} = 1$	**V**	F
3C	$\lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - x}{g(x)} = 0$	V	**F**
3D	l'equazione della retta tangente il grafico di $g(f(x))$ nel punto di ascissa $x = 0$ é $y = x$	V	**F**

4. Sia $\phi(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-2, 0) \\ 2 & x \in [0, 1) \\ -3 & x \in [1, 2] \end{cases}$; $F(x) := \int_{-1}^x \phi(s) \, ds$.

4A	F è derivabile in $[-2, 2]$	V	**F**
4B	F è discontinua in $x = 0$	V	**F**
4C	$F(1) = 1$	**V**	F
4D	esiste $\xi \in [-1, 0]$ tale che $\phi(\xi) = \frac{1}{2}(F(0) - F(-1))$	V	**F**

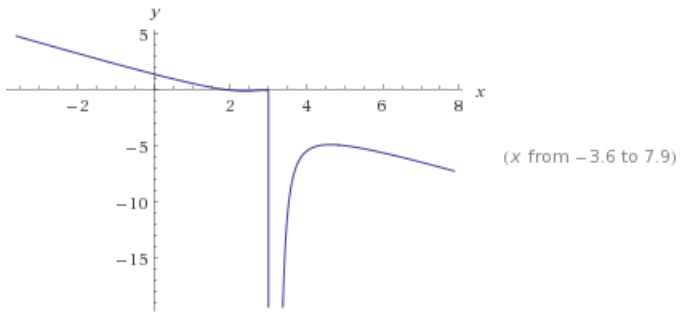

Figura 6: grafico di f

5. Data $f(x) = (2-x)e^{\frac{1}{x-3}}$, studiare:

(i) dominio e segno di f

(ii) limiti negli estremi del dominio e continuità di f

(iii) derivabilità, monotonia ed estremi relativi ed assoluti di f

(iv) convessità e grafico di f

Soluzione.
(i) L'unica operazione in f che non è sempre definita è la divisione $1/(x-3)$. Di conseguenza, il dominio di f è

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 3\}.$$

Dato che la funzione esponenziale assume valori positivi, concludiamo inoltre che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 2$.
(ii] In quanto prodotto di funzioni continue, f è continua in D_f. Inoltre $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} 1/(x-3) = 0$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

È poi evidente che $\lim_{x\longrightarrow 3^{\pm}} 1/(x-3) = \pm\infty$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow 3^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\longrightarrow 3^+} f(x) = -\infty.$$

(iii) Un calcolo esplicito mostra che

$$f'(x) = -\frac{x^2-7x+11}{(x-3)^2}e^{\frac{1}{x-3}}.$$

Di conseguenza,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-7x+11 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left[\frac{7}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right].$$

Risulta quindi che i punti $x = \frac{7}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}$ ed $x = \frac{7}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}$ sono, rispettivamente, di minimo e di massimo relativo per f. Dato che f è illimitata sia dall'alto che dal basso, come mostrato in (ii), non esistono punti di estremo assoluto.
(iv) Un ulteriore calcolo esplicito mostra che

$$f''(x) = \frac{8-3x}{(x-3)^4}e^{\frac{1}{x-3}}.$$

Deduciamo che

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 8-3x \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{8}{3}.$$

La funzione f è dunque convessa in $(-\infty, 8/3]$ e non convessa altrove.
Il grafico di f quindi quello mostrato in figura 2.

6. Data l'equazione differenziale

$$u'' + 6u' + 10u = 13\cos t \qquad (*)$$

(i) trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $(*)$

(ii) trovare tutte le soluzioni di $(*)$

(iii) trovare tutte le soluzioni limitate di $(*)$

(iv) trovare tutte le soluzioni di $(*)$ tali che $u(0) = 0$, $u'(0) = 1$.

Soluzione.
(i) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 10,$$

le cui due radici (complesse e coniugate) sono $\lambda_{12} := -3 \pm i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono quindi tutte e sole della forma

$$u_0(t) = e^{-3t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right].$$

(ii) Per trovare una soluzione particolare di $(*)$, cerchiamo $z(t) \in \mathbb{C}$ tale che

$$z'' + 6z' + 10z = 13e^{it}, \qquad z(t) = \eta e^{it}.$$

Derivando, otteniamo $z' = i\eta e^{it}$, $z'' = -\eta e^{it}$, per cui imponiamo che

$$-\eta + 6i\eta + 10\eta = 13 \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \frac{13}{3(3+2i)} = 1 - \frac{2i}{3}.$$

Deduciamo che $u(t) = \Re z(t) = \cos t + \frac{2}{3}\sin t$ è una soluzione di $(*)$ e quindi le soluzioni di $(*)$ sono tutte e sole della forma

$$u(t) = e^{-3t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right] + \cos t + \frac{2}{3}\sin t \qquad (2)$$

(iii) Dato che la funzione e^{-3t} è illimitata, l'unica soluzione limitata di $(*)$ è tale che $c_1 = c_2 = 0$ ovvero

$$u(t) = \cos t + \frac{2}{3}\sin t.$$

(iv) Derivando in (2) otteniamo

$$u'(t) = e^{-3t}[(c_2 - 3c_1)\cos t - (c_1 + 3c_2)\sin t] - \sin t + \frac{2}{3}\cos t,$$

da cui $u(0) = c_1 + 1$, $u'(0) = c_2 - 3c_1 + \frac{2}{3}$. Imponendo le condizioni iniziali richieste otteniamo dunque

$$\begin{cases} c_1 + 1 = 0 \\ c_2 - 3c_1 + \frac{2}{3} = 1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $c_1 = -1$, $c_2 = -\frac{8}{3}$, da cui otteniamo la soluzione richiesta

$$u(t) = e^{-3t}\left[-\cos t - \frac{8}{3}\sin t\right] + \cos t + \frac{2}{3}\sin t.$$

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Seconda prova in itinere – 15 gennaio 2016 – **VII**

Matricola

Cognome

Nome

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sará assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

1. Siano $f(x) = 1 - \cos x$, $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

1A	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - x}{g(x)} = 0$	V	**F**
1B	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)g(x)}{x^3} = \dfrac{1}{2}$	**V**	F
1C	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$	**V**	F
1D	l'equazione della retta tangente il grafico di $g(f(x))$ nel punto di ascissa $x = 0$ é $y = x$	V	**F**

2. Siano $P(x) = 1 + x^2$ ed $f(x) = e^{-x} - \log(1 - x)$.

2A	P é il polinomio di Taylor di grado 2 e centro in $x_0 = 0$ di f	**V**	F
2B	$f(x) = P(x) + o(x^3)$	V	**F**
2C	per ogni $x > 0$, esiste $\xi \in (0, x)$ tale che $f(x) - 1 = x\left(e^{\xi} + \frac{1}{1-\xi}\right)$	V	**F**
2D	$\lim_{x\longrightarrow 0} \dfrac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0$	**V**	F

3. Sia $\phi(x) = \begin{cases} -2 & x \in [-2, 0) \\ 1 & x \in [0, 1) \\ 2 & x \in [1, 2] \end{cases}$; $F(x) := \int_{-1}^x \phi(s)\,ds$.

3A	F è continua in $[-2, 2]$	**V**	F
3B	F è derivabile in $x = 1$	V	**F**
3C	$F(2) = 0$	V	**F**
3D	esiste $\xi \in [0, 2]$ tale che $\phi(\xi) = \frac{1}{2}(F(2) - F(0))$	V	**F**

4. Sia $F(x) = \int_0^x \log(1 + t^2)\,dt$.

4A	F è crescente in $\mathbb{R}$	**V**	F
4B	$F(1) = \frac{\pi}{2} - 2 + \log 2$	**V**	F
4C	F è pari	V	**F**
4D	il polinomio di Taylor di F di grado 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P(x) = 2x$	V	**F**

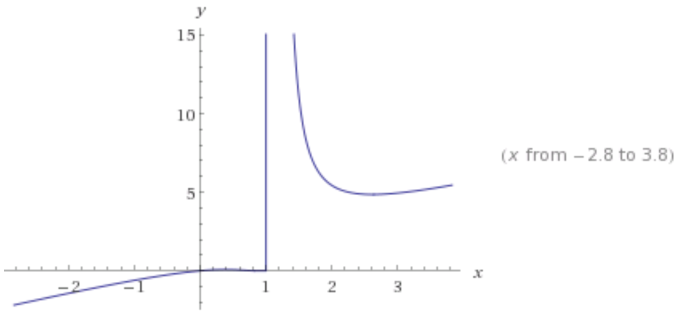

Figura 7: grafico di f

5. Data $f(x) = xe^{\frac{1}{x-1}}$, studiare:

(i) dominio e segno di f

(ii) limiti negli estremi del dominio e continuità di f

(iii) derivabilità, monotonia ed estremi relativi ed assoluti di f

(iv) convessità e grafico di f

Soluzione.
(i) L'unica operazione in f che non è sempre definita è la divisione $1/(x-1)$. Di conseguenza, il dominio di f è

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}.$$

Dato che la funzione esponenziale assume valori positivi, concludiamo inoltre che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$.
(ii] In quanto prodotto di funzioni continue, f è continua in D_f. Inoltre $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} 1/(x-1) = 0$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

È poi evidente che $\lim_{x\longrightarrow 1^\pm} 1/(x-1) = \pm\infty$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

(iii) Un calcolo esplicito mostra che

$$f'(x) = \frac{x^2-3x+1}{(x-1)^2} e^{\frac{1}{x-1}}.$$

Di conseguenza,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-3x+1 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right).$$

Risulta quindi che i punti $x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ ed $x = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ sono, rispettivamente, di massimo e di minimo relativo per f. Dato che f è illimitata sia dall'alto che dal basso, come mostrato in (ii), non esistono punti di estremo assoluto.
(iv) Un ulteriore calcolo esplicito mostra che

$$f''(x) = \frac{3x-2}{(x-1)^4} e^{\frac{1}{x-1}}.$$

Deduciamo che

$$f''(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-2 \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq \frac{2}{3}.$$

La funzione f è dunque convessa in $[2/3, 1)$ e in $(1, +\infty)$ e non convessa altrove.
Il grafico di f quindi quello mostrato in figura 3.

6. Data l'equazione differenziale

$$u'' + 4u' + 5u = 4 \sin t \qquad (*)$$

(i) trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $(*)$

(ii) trovare tutte le soluzioni di $(*)$

(iii) trovare tutte le soluzioni limitate di $(*)$

(iv) trovare tutte le soluzioni di $(*)$ tali che $u(0) = -\frac{1}{2}$, $u'(0) = 1$.

Soluzione.
(i) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 5,$$

le cui due radici (complesse e coniugate) sono $\lambda_{12} := -2 \pm i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono quindi tutte e sole della forma

$$u_0(t) = e^{-2t} \left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right].$$

(ii) Per trovare una soluzione particolare di $(*)$, cerchiamo $z(t) \in \mathbb{C}$ tale che

$$z'' + 4z' + 5z = 4e^{it}, \qquad z(t) = \eta e^{it}.$$

Derivando, otteniamo $z' = i\eta e^{it}$, $z'' = -\eta e^{it}$, per cui imponiamo che

$$-\eta + 4i\eta + 5\eta = 4 \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \frac{4}{4(1+i)} = \frac{1}{2} - \frac{i}{2}.$$

Deduciamo che $u(t) = \Im z(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t)$ è una soluzione di $(*)$ e quindi le soluzioni di $(*)$ sono tutte e sole della forma

$$u(t) = e^{-2t} \left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right] + \frac{1}{2}(\sin t - \cos t). \qquad (3)$$

(iii) Dato che la funzione e^{-2t} è illimitata, l'unica soluzione limitata di $(*)$ è tale che $c_1 = c_2 = 0$ ovvero

$$u(t) = \frac{1}{2}(\sin t - \cos t).$$

(iv) Derivando in (3) otteniamo

$$u'(t) = e^{-2t}[(c_2 - 2c_1)\cos t - (c_1 + 2c_2)\sin t] + \frac{1}{2}(\cos t + \sin t),$$

da cui $u(0) = c_1 - \frac{1}{2}$, $u'(0) = c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2}$. Imponendo le condizioni iniziali richieste otteniamo dunque

$$\begin{cases} c_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ c_2 - 2c_1 + \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $c_1 = 0$, $c_2 = \frac{1}{2}$, da cui otteniamo la soluzione richiesta

$$u(t) = \frac{1}{2}\left[e^{-2t} \sin t + \sin t - \cos t\right].$$

Corso di laurea in *Fisica*, a.a. 2015/16

Analisi (L. Fanelli - M. Marchi - P. Vernole - A. Pisante)

Seconda prova in itinere – 15 gennaio 2016 – **VIII**

Matricola

Cognome

Nome

Regolamento. Annerire in modo evidente un'opzione a scelta fra V (vero) ed F (falso). Sará assegnato un punteggio di 1 per ogni risposta giusta, 0 per ogni risposta non data e $-\frac{1}{2}$ per ogni risposta sbagliata.

1. Sia $\phi(x) = \begin{cases} -1 & x \in [-2,0) \\ -2 & x \in [0,1) \\ 3 & x \in [1,2] \end{cases}$; $F(x) := \int_{-1}^{x} \phi(s)\,ds$.

1A	F è derivabile in $x = \frac{1}{2}$	V	F
1B	F è discontinua in $x = \frac{1}{2}$	V	F
1C	$F(1) = 1$	V	F
1D	esiste $\xi \in [-1,0]$ tale che $\phi(\xi) = \frac{1}{2}(F(0) - F(-1))$	V	F

2. Siano $f(x) = x \sin x$, $g(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

2A	$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$	V	F
2B	$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)-x}{g(x)} = 0$	V	F
2C	$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x)g(x)}{x^3} = 1$	V	F
2D	l'equazione della retta tangente il grafico di $g(f(x))$ nel punto di ascissa $x = 0$ é $y = x$	V	F

3. Siano $P(x) = 1 + x^2$ ed $f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} - \cos x + 1$.

3A	P é il polinomio di Taylor di grado 2 e centro in $x_0 = 0$ di f	V	F
3B	$\forall x > 0$, esiste $\xi \in (0,x)$ tale che $f(x) - 1 = x\left(\xi e^{\frac{\xi^2}{2}} + \sin \xi\right)$	V	F
3C	$f(x) = P(x) + o(x^3)$	V	F
3D	$\lim_{x\longrightarrow 0} \frac{f(x) - P(x)}{x^2} = 0$	V	F

4. Sia $F(x) = \int_0^x t \arctan t\,dt$.

4A	il polinomio di Taylor di F di grado 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P(x) = \pi x$	V	F
4B	F è crescente in $\mathbb{R}$	V	F
4C	F è pari	V	F
4D	$F(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$	V	F

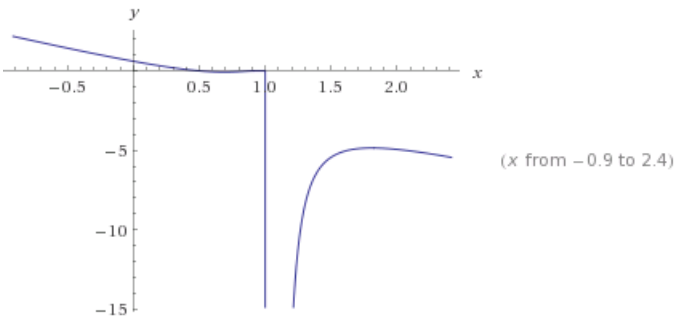

Figura 8: grafico di f

5. Data $f(x) = (1-2x)e^{\frac{1}{2(x-1)}}$, studiare:

(i) dominio e segno di f

(ii) limiti negli estremi del dominio e continuità di f

(iii) derivabilità, monotonia ed estremi relativi ed assoluti di f

(iv) convessità e grafico di f

Soluzione.
(i) L'unica operazione in f che non è sempre definita è la divisione $1/2(x-1)$. Di conseguenza, il dominio di f è

$$D_f := \{x \in \mathbb{R} : x \neq 1\}.$$

Dato che la funzione esponenziale assume valori positivi, concludiamo inoltre che $f(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1/2$.
(ii] In quanto prodotto di funzioni continue, f è continua in D_f. Inoltre $\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} 1/2(x-1) = 0$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow\pm\infty} f(x) = \mp\infty.$$

È poi evidente che $\lim_{x\longrightarrow 1^{\pm}} 1/2(x-1) = \pm\infty$, da cui

$$\lim_{x\longrightarrow 1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\longrightarrow 1^+} f(x) = -\infty.$$

(iii) Un calcolo esplicito mostra che

$$f'(x) = -\frac{4x^2-10x+5}{2(x-1)^2} e^{\frac{1}{2(x-1)}}.$$

Di conseguenza,

$$f'(x) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2-10x+5 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \notin \left(\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}, \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

Risulta quindi che i punti $x = \frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}$ ed $x = \frac{5}{4} + \frac{\sqrt{5}}{4}$ sono, rispettivamente, di minimo e di massimo relativo per f.
Dato che f è illimitata sia dall'alto che dal basso, come mostrato in (ii), non esistono punti di estremo assoluto.
Il grafico di f quindi quello mostrato in figura 4.

6. Data l'equazione differenziale

$$u'' + 6u' + 10u = 13\sin t \qquad (*)$$

(i) trovare tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata a $(*)$

(ii) trovare tutte le soluzioni di $(*)$

(iii) trovare tutte le soluzioni limitate di $(*)$

(iv) trovare tutte le soluzioni di $(*)$ tali che $u(0) = 0$, $u'(0) = -1$.

Soluzione.
(i) Il polinomio caratteristico dell'equazione omogenea è

$$P(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 10,$$

le cui due radici (complesse e coniugate) sono $\lambda_{12} := -3 \pm i$. Le soluzioni dell'equazione omogenea sono quindi tutte e sole della forma

$$u_0(t) = e^{-3t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right].$$

(ii) Per trovare una soluzione particolare di $(*)$, cerchiamo $z(t) \in \mathbb{C}$ tale che

$$z'' + 6z' + 10z = 13e^{it}, \qquad z(t) = \eta e^{it}.$$

Derivando, otteniamo $z' = i\eta e^{it}$, $z'' = -\eta e^{it}$, per cui imponiamo che

$$-\eta + 6i\eta + 10\eta = 13 \qquad \Leftrightarrow \qquad \eta = \frac{13}{3(3+2i)} = 1 - \frac{2i}{3}.$$

Deduciamo che $u(t) = \Im z(t) = \sin t - \frac{2}{3}\cos t$ è una soluzione di $(*)$ e quindi le soluzioni di $(*)$ sono tutte e sole della forma

$$u(t) = e^{-3t}\left[c_1 \cos t + c_2 \sin t\right] + \sin t - \frac{2}{3}\cos t \qquad (4)$$

(iii) Dato che la funzione e^{-3t} è illimitata, l'unica soluzione limitata di $(*)$ è tale che $c_1 = c_2 = 0$ ovvero

$$u(t) = \sin t - \frac{2}{3}\cos t.$$

(iv) Derivando in (4) otteniamo

$$u'(t) = e^{-3t}[(c_2 - 3c_1)\cos t - (c_1 + 3c_2)\sin t] + \cos t + \frac{2}{3}\sin t,$$

da cui $u(0) = c_1 - \frac{2}{3}$, $u'(0) = c_2 - 3c_1 + 1$. Imponendo le condizioni iniziali richieste otteniamo dunque

$$\begin{cases} c_1 - \frac{2}{3} = 0 \\ c_2 - 3c_1 + 1 = -1 \end{cases}$$

la cui unica soluzione è $c_1 = \frac{2}{3}$, $c_2 = 0$, da cui otteniamo la soluzione richiesta

$$u(t) = -e^{-3t}\frac{2}{3}\cos t + \sin t - \frac{2}{3}\cos t.$$