Istituzioni di Matematica II
2014/2015
Programma dettagliato del corso

Numeri complessi

- Il campo dei numeri complessi. Forma algebrica. Modulo e coniugato. Forma trigonometrica. Significato geometrico delle operazioni di moltiplicazione ed elevamento a potenza intera. Estrazione di radice con rappresentazione geometrica.
- Polinomi nel campo complesso. Teorema fondamentale dell'algebra e teorema di Ruffini. Fattorizzazione in $\mathbb{R}$ dei polinomi a coefficienti reali (con dimostrazione).
- Distanza in $\mathbb{C}$. Limiti di successioni nel campo complesso. Serie numeriche nel campo complesso. Criterio di "convergenza assoluta". Serie di potenze nel campo complesso e loro insieme di convergenza. La serie esponenziale. Forma di Eulero dei numeri complessi.

Algebra Lineare

- I vettori nel piano e nello spazio (lunghezza, direzione e verso), somma di due vettori con la regola del parallelogramma, dilatazioni, contrazioni e inversioni di vettori. Proprietá di queste operazioni.
- Definizione di spazio vettoriale su un campo numerico. Esempi:

  $$R^n,\ C([a,b],\ C^n([a,b],\ C^{+\infty}([a,b]), P(x),\ P_n(x).$$

  Combinazioni lineari, vettori linearmente indipendenti e vettori linearmente dipendenti, sottospazi vettoriali, sottospazi generati da n vettori, insiemi di generatori, base. Dimensione di uno spazio vettoriale.
- Applicazioni lineari tra spazi vettoriali. Nucleo e immagine. Esempi di applicazioni lineari da $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{R}^2$ e loro significato geometrico. Esempi di applicazioni lineari: l'operatore di derivazione e l'integrale definiyo.
- Matrici a m righe e n colonne, addizione e moltiplicazione per uno scalare. La matrice trasposta. Proprietá della trasposizione. Matrici simmetriche. Lo spazio vettoriale delle matrici nXm. Moltiplicazione righe per colonne tra matrici. Lo spazio delle matrici quadrate di dimensione n. La matrice identitá e le sue proprietá. La matrice inversa. Il determinante. Proprietá del determinante. Teorema sulla caratterizzazione delle matrici invertibili. Teorema di Binet.
- Rango di una matrice.

- Teorema di rappresentazione delle applicazioni lineari tra spazi di dimensione finita. Matrice del cambiamento di base. Come si trasforma una matrice che rappresenta una applicazione lineare se si cambiano le basi.
- Sistemi lineari di n equazioni in n incognite. Teorema di Cramer (con dimostrazione). Sistemi lineari di m equazioni in n incognite.Teorema di Rouché Capelli (con dimostrazione). Sistemi omogenei. Condizioni necessaria e sufficiente perché un sistema omogeneo di n equazioni in n incognite abbia soluzioni non banali (con dimostrazione).
- Autovalori e autovettori di una matrice. Caratterizzazione degli autovalori con dimostrazione. Autovettori e autospazio associati ad un autovalore. Autovalori regolari. Matrici diagonalizzabili. Teorema sulla diagonalizzabilitá delle matrici simmetriche.
- Poliniomi di primo grado omogenei in una o piú variabili, applicazioni lineari e matrice rappresentativa.
- Polinomi di secondo grado omogenei in una o piú variabili, forme quadratiche e matrice **simmetrica** rappresentativa. Forme quadratiche definite, semidefinite, indefinte. Teorema che collega il segno di una forma quadratica con il segno degli autovalori della matrice rappresentativa (con cenno di dimostrazione). Caso delle forme quadratiche in due variabili: teorema che collega il segno di una forma quadratica con il segno del determinante della matrice rappresentativa.
- Spazi vettoriali con norma. Norma euclidea. Distanza indotta dalla norma. Serie in uno spazio normato. Esempi: $C^{+\infty}([a,b])$ con la norma del sup, serie di Taylor.
- Prodotto scalare tra i vettori dello spazio o del piano. Proprietá. Ortogonalitá e lunghezza. Norma indotta da un prodotto scalare. Norma euclidea. Distanza euclidea. Come agisce il prodotto scalare sulle componenti scalari. Basi ortonormali. Il teorema di Pitagora.
- Spazi vettoriali astratti con prodotto scalare. Esempi: $C([a,b]$ con $< f,g >= \int_a^b f(x)g(x)\,dx$. Serie trigonometriche e serie di Fourier.
- Prodotto vettoriale tra i vettori dello spazio. Proprietá. Parallelismo. Area di un parallelogramma. Prodotto vettoriale e componenti scalari.
- Prodotto misto. Proprietá. Complanaritá. Volume di un parallelepipedo. Prodotto misto e componenti scalari.
- Rette nello spazio: per un punto con una direzione data; per due punti. Rette in forma parametrica e in forma cartesiana. Rette parallele, incidenti e sghembe.
- Piani per un punto ed ortogonali ad una direzione data; per tre punti; contenenti due rette incidenti. Piani paralleli e ortogonali, Piani paralleli ad una retta data.
- Rette come intersezione di due piani non paralleli.

Equazioni differenziali

- Equazioni differenziali del primo ordine: integrale generale e problema di Cauchy. Teoremi di esistenza ed unicitá locale e globale. Equaioni differenziali a variabili saparabili. Equazioni differenziali lineari: il metodo del fattore integrante.

Equazioni riconducibili a equazioni lineari: equazioni di Bernoulli. Equazioni riconducibili a equazioni a variabili separabili: equazioni omogenee di Manfredi.
- Equazioni differenziali del secondo ordine: integrale generale e problema di Cauchy. Equazioni differenziali del secondo ordine lineari: struttura dell'integrale generale (con dimostrazione). Teorema di esistenza ed unicitá globale per il problema di Cauchy. L'integrale generale dell'omogenea. Metodo della variazione delle costanti nella ricerca di una soluzione della non omogenea. L'integrale generale dell'omogenea nel caso dei coefficienti costanti, polinomio caratteristico. Metodo di somiglianza nella ricerca di una soluzione della equazione non omogenea, nel caso dei coefficienti costanti.
- Cenni sulle equazioni differenziali lineari di ordine superiore al secondo
- Esempi di equazioni della cinetica chimica: reazioni del primo e del secondo ordine con una o due componenti. Esempi di equazioni della dinamica di popolazioni: l'equazione di Malthus e l'equazione logistica.

Curve

- Funzioni di una variabile reale a valori vettoriali. Curva, sostegno di una curva.
- Limiti. Continuitá. Condizioni necessarie e sufficienti sulle componenti. Curve semplici. Curve chiuse. Esempi di curve piane: rette, circonferenze, ellissi, folium di Cartesio, spirale di Archimede, spirale logaritmica. Esempi di curve nello spazio: elica cilindrica, elica conica .
- Derivabilitá. Condizioni necessarie e sufficienti sulle componenti. Vettore derivato o vettore velocitá, vettore e retta tangente. Curve regolari. Algebra della derivate.
- Curve piane: grafico di una funzione reale di variabile reale, curve in forma polare.
- Lunghezza di una curva: definizione e formula (con dimostrazione). Il parametro arco.
- Integrali di linea di prima specie: definizioni, proprietá.

Funzioni a valori reali di due variabili reali.

- Funzioni a valori reali di due variabili reali. Grafici e curve di livello.
- Limiti e continuitá. Forme indeterminate. Comportamento della funzione
$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$$
per $(x,y) \to (0,0)$.
- Topologia in $\mathbb{R}^2$ e R^3. Insiemi limitati. Insiemi aperti, chiusi, frontiera di un insieme. Caratterizzazione degli insiemi aperti e chiusi rispetto alla frontiera. Unione, e intersezione finite e numerabili di insiemi aperti e chiusi. Teorema di Weierstress. Insiemi connessi. Teorema di esistenza degli zeri (con dimostrazione). Studio del segno di una funzione. Domini semplicemente connessi: definizione e caratterizzazioni in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
- Differenziabilitá, piano tangente, differenziale. Derivate parziali, gradiente. Formula di Taylor di ordine uno. Condizioni necessarie e condizioni sufficienti per la differenziabiltá. Derivate direzionali: definizione e formula del gradiente (con dimostrazione). Significato del gradiente. Algebra delle derivate. Derivata delle

funzioni composte. Ortogonalitá del gradiente rispetto alle curve di livello (con dimostrazione).

- Punti di massimo e minimo locale, punti di sella. Punti critici. Teorema di Fermat con esempi e controesempi. Derivate seconde. Teorema di Schwarz. Differenziale secondo, matrice Hesssiana, formula di Taylor di ordine due. Studio della natura dei punti critici.
- Metodo dei minimi quadrati e retta di regressione.
- Estremi vincolati: caso in cui il vincolo é una curva in forma parametrica. Osservazioni sulla tangenza tra il vincolo e le curve di livello della funzione di cui si cercano gli estremi. Caso in cui il vincolo é dato in forma implicita e metodo dei moltiplicatori di Lagrange (con dimostrazione).
- Funzioni definite implicitamente. Teorema di Dini. Derivata prima e seconda della funzione definita implicitamente.

Funzioni di piú variabili a valori vettoriali

- Limiti, continuitá, differenziabilitá, matrice Jacobiana. Esempi:
- Cambiamento di variabili in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$: coordinate polari, coordinate cilindriche, coordinate sferiche e loro matrice Jacobiana.
- Superfici in forma parametrica.
- Campi vettoriali in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$:
  - campi conservativi e potenziale, campi irrotazionali. Condizione necessaria perché un campo sia conservativo (con dimostrazione).
  - Lavoro di un campo vettoriale lungo una curva o integrale di linea di seconda specie. Proprietá. Teoremi sul lavoro di un campo conservativo. Condizione sufficienti perché un campo sia conservativo. Condizioni equivalenti all'essere un campo conservativo.
  - I campi
$$\mathbf{F}(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}) \quad \mathbf{G}(x,y) = (-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2})$$

Integrali doppi

- Definizione. Domini x-semplici, y-semplici, regolari.
- Metodo di riduzione. Cambiamento di variabili: passaggio a coordinate polari.
- Formule di Gauss-Green nel piano (con dimostrazione). Utilizzo delle formule nella dimostrazione che il lavoro di un campo irrotazionale lungo una curva chiusa, contenuta in una componente semplicemente connessa del dominio del campo, é nullo.

Cenni

- Integrali tripli.
- Integrali superficiali.
- Teoremi del rotore e della divergenza.