Corso di laurea in Chimica. AA 2014-2015
Istituzioni di Matematica II.
Secondo esonero
Soluzioni

1. Si cerchino i punti critici della funzione

$$f(xy) = xy(y-1)^2$$

e se ne studi la natura.

Soluzione

$$\begin{cases} f_x(x,y) = y(y-1)^2 \\ f_y(x,y) = x((y-1)^2 + 2y(y-1)) = x(y-1)(3y-1) \end{cases}$$

I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y(y-1)^2 = 0 \\ x(y-1)(3y-1) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $y = 0$ e $y = 1$. Sostituendo $y = 0$ nella seconda si ottiene $x = 0$, sostituendo $y = 1$ nella seconda si ottiene 0 per ogni valore di x. I punti critici sono i punti $(0,0)$ e $(x,1)$.

$$f_{xx}(x,y) = 0$$

$$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = (y-1)(3y-1)$$

$$f_{yy}(x,y) = x(6y-4)$$

$$h(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Gli autovalori di $h(0,0)$ sono le soluzioni di

$$\det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

$\lambda = \pm 1$. Dal momento che i due autovalori hanno segno discorde, il differenziale secondo é una forma quadratica indefinita e $(0,0)$ é punto di sella.

$$h(x,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2x \end{pmatrix}$$

ha un autovalore uguale a 0. Il differenziale secondo é una forma quadratica semidefinita e quindi nulla si puó affermare sui punti $(x,1)$ se non si osserva il comportamento della funzione in un loro intorno.

$$f(x,y) \begin{cases} > 0 & \text{nei punti del primo e del terzo quadrante diversi dai punti } (x,1) \\ < 0 & \text{nei punti del secondo e del quarto quadrante diversi dai punti } (x,1) \\ = 0 & \text{nei punti } (x,1) \end{cases}$$

Perció i punti $(x,1)$ con $x > 0$ sono punti di minimo locale, i punti $(x,1)$ con $x < 0$ sono punti di massimo locale, $(0,1)$ é punto di sella.

2. Si dimostri che in un intorno del punto $(1,1)$ le soluzioni dell'equazione

$$(x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2) = 2$$

sono il grafico di una funzione $y = \phi(x))$ e che $y = \phi(x))$ é decrescente in un intorno del punto $x_0 = 1$.

Soluzione Posto

$$f(x,y) = (x^2+y^2)^3 - 3(x^2+y^2)$$

risulta $f(1,1) = 8 - 6 = 2$.

$$f_y(x,y) = 2y(3(x^2+y^2)^2 - 3)$$

e $f_y(1,1) = 18 \neq 0$.

Per il teorema di Dini, l'equazione deifinisce implicitamente una funzione $y = \phi(x)$ in un intorno di $(1,1)$.

$f_x(x,y) = 2x(3(x^2+y^2)^2 - 3)$ e $f_x(1,1) = 18$.

$$\phi'(x) = -\frac{f_x(x,\phi(x))}{f_y(x,\phi(x))}$$

Questa funzione é continua, perché lo sono le funzioni $f_x(x,\phi(x))$ e $f_y(x,\phi(x))$.

$\phi'(1) = -\frac{f_x(1,1)}{f_y(1,i)} = -1$. Per il teorema della permanenza del segno, esiste un intorno del punto $x_0 = 1$ in cui $\phi'(x) < 0$. In questo intervallo, $\phi(x)$ é decrescente.

3. Sia γ il sostegno della curva di equazione polare $\rho = e^\theta$, con $\theta \in [0,\pi]$, si calcolino

$$\int_\gamma (x^2+y^2)\, ds$$

e

$$\int_\gamma \underline{F}(x,y)\cdot \underline{dr}$$

dove $\underline{F}(x,y)=(x^2,y^2)$ e γ é orientata nel verso delle θ crescenti.

Soluzione Indicata con $\underline{r}(\theta)$ la rappresentazione parametrica di γ che si ottiene dalla forma polare, si ha

$$|\underline{r}'(\theta)| = \sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2} = e^\theta\sqrt{2}$$

e quindi

$$\int_\gamma (x^2+y^2)\,ds = \int_0^\pi (\rho(\theta))^2|\underline{r}'(\theta)|\,d\theta = \sqrt{2}\int_0^\pi e^{3\theta}\,d\theta =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{3}e^{3\theta}|_0^\pi = \frac{\sqrt{2}}{3}(e^{3\pi}-1)$$

$\underline{F}$ é irrotazionale, infatti

$$\frac{\partial x^2}{\partial y} = \frac{\partial y^2}{\partial x} = 0$$

$\underline{F}$ é definito in $\mathbb{R}^2$ che é semplicemente connesso, e quindi $\underline{F}$ é conservativo. I potenziali di $\underline{F}(x,y)$ sono

$$U(x,y) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}+g(y)$$

dove $g(y)$ si ottiene da

$$U_y(x,y) = g'(y) = y^2$$

da cui segue $g(y)=\frac{y^3}{3}+k$.

$$U(x,y) = \frac{x^3+y^3}{3}+k$$

Gli estremi di γ sono $(e^0\cos 0, e^0\sin 0)=(1,0)$ e $(e^\pi\cos\pi, e^\pi\sin\pi)=(-e^\pi,0)$,

$$\int_\gamma \underline{F}(x,y)\cdot\underline{dr} = U(e^\pi,0)-U(1,0) = -\frac{e^{3\pi}+1}{3}$$

4. i) Si calcoli

$$\iint_D x\cos y\,dxdy$$

dove $D=\{(x,y): 0\le x\le\sqrt{\pi},\ 0\le y\le x^2\}$

Soluzione D é y-semplice.

$$\iint_D x\cos y\,dxdy = \int_0^{\sqrt{\pi}}(x\int_0^{x^2}\cos y\,dy\,)dx =$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}}(x(\sin y|_0^{x^2})dx = \int_0^{\sqrt{\pi}} x(\sin(x^2)-\sin 0)\,dx =$$

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} x\sin(x^2) = -\frac{1}{2}\cos(x^2)|_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{1}{2}(\cos(\pi)-\cos 0) = 1$$