Esercizi su curve e funzioni reali di più variabili reali
1Febbraio 2010

1.Si calcoli la lunghezza della curva di equazione g

$$y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\log x \qquad x \in [1, e].$$

2. Sia

$$f(x, y,) = x^2 + y^2$$

e γ sia il sostegno della curva la cui equazione in forma polare

$$\rho = e^\theta \qquad \theta \in \ [0, 2\pi],$$

si calcoli

$$\int_\gamma f\, ds$$

3. Sia γ la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 1 - \cos\, t \qquad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ z(t) = \text{sen}\ t. \end{cases}$$

Si calcoli

$$\int_\gamma \sqrt{x} ds$$

4. Si calcoli

$$\int_\gamma \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} ds$$

dove γ è il sostegno della curva

$$\rho = 1 - \cos\theta \quad \text{con } \theta \in [\frac{\pi}{2}, \pi].$$

5. Sia dica se la seguente forma quadratica è definita, indefinita, semidefinita

$$3x^2 - 2\sqrt{5}xy - y^2.$$

6. Sia dica se la seguente forma quadratica è definita, indefinita, semidefinita

$$3x^2 - 4xy - y^2.$$

7. i) Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = e^x(x-1)(y-1) + (y-1)^2$$

e se ne studi la natura.

ii) Si calcoli $F'(0)$, dove $F(t) = f(\mathbf{r}(t))$ con $\mathbf{r}(t) = \begin{cases} x(t) = (t+1)^3 + \sin t \\ y(t) = \frac{t}{t+1} + \cos^2 t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$

8. Data la funzione

$$f(x,y) = xy^2 \mathrm{e}^{-xy}$$

a) se ne trovino i punti critici e si studi la loro natura.

b) Posto

$$F(t) = f(\underline{r}(t)),$$

dove $\underline{r}(t) \begin{cases} x(t) = t^2 - t \\ y(t) = 2t^3 - t^2 - 2t + 1 \end{cases}$,

si calcoli $F'(2)$.

9. Data la funzione

$$f(x,y) = x(1-y^2)$$

a) determinare i punti critici di f e la loro natura;

b) dimostrare che f ammette massimo e minimo assoluto nel rettangolo chiuso di vertici $(2,1), (-2,1), (-2,-1), (2,-1)$ e calcolare tali massimo e minimo.

10. Siano

$$f(x,y) = y^2 + 2x^2 - y \quad \text{e} \quad E = \{(x,y) : x^2 + (y-1)^2 \leq 1\},$$

dopo aver dimostrato che la funzione $f(x,y)$ ristretta all'insieme E soddisfa il teorema di Weierstrass, si calcolino massimo e minimo di $f(x,y)$ in E.

11. Si trovino i punti di massimo e minimo assoluto per la funzione

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

nel triangolo di vertici
$(1,1), (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (1,-1)$.

12. Si calcolino massimo e minimo della funzione

$$f(x,y) = 9x^2 + y^2$$

ristretta al cerchio chiuso di centro $(1,0)$ e raggio 2.

Esercizi

§**1.**

1. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (y^2 \log x(\log x + 2), 2xy \log^2 x + e^y)$ si dica se ammette potenziale e, in caso affermativo si trovi quel potenziale $U(x,y)$ tale che $U(1,1) = 1$.

2. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (x^2 + y, x)$,
(i) si dimostri che e' conservativo,
(ii) si trovi quel potenziale $U(x,y)$, tale che $U(1,2) = 0$.

3. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos y(\cos x + \operatorname{sen} x) + y, \mathrm{e}^x \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y + x)$, si dimostri che è conservativo e se ne calcoli un potenziale.

4. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos y, -\mathrm{e}^x \operatorname{sen} y + y)$,
(i) si dimostri che e' conservativo,
(ii) si calcoli un potenziale.

5. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (\frac{x}{2}, \frac{y}{8}),$$

i) si dica se e' conservativo e, in caso affermativo, se ne calcoli un potenziale;
ii) si disegni l'insieme dei punti $P = (x,y)$ tali che il lavoro di $\mathbf{F}$ da $P_0 = (2,0)$ a $P = (x,y)$ sia positivo.

§**2.**

Nei prossimi esercizi il campo non è irrotazionale e quindi non è conservativo, perciò il lavoro dipende dalla curva e va calcolato usando la definizione.

Nel caso in cui la curva sia chiusa, si può usare il teorema di Gauss - Green, tenendo conto dell'orientamento della curva.

1. Dato il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = (\frac{e^x}{\sqrt{1+y^2}}, 0)$$

e la curva γ, bordo dell'insieme

$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1, \quad \sinh x \leq y \leq \sinh 1\}$$

orientata in verso antiorario, si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x,y)\cdot \mathbf{d}r.$$

2. Si calcoli il lavoro del campo $\mathbf{F}(x,y) = (x^2y, -xy^2)$ lungo la curva composta dall'arco di parabola $y = x^2, \quad -1 \le x \le 1$ e dal segmento di estremi $(-1,1)$ e $(1,1)$, orientata in verso antiorario.

§**3.**

Nei prossimi esercizi il campo è conservativo perchè è irrotazionale ed è definito in un insieme semplicemente connesso e quindi:

- il lavoro lungo ogni curva chiusa è nullo,

- il lavoro lungo una curva non chiusa dipende solo dagli estremi della curva, così che si può calcolare o cercando un potenziale e calcolandone la differenza negli estremi della curva, o integrando lungo un'altra curva, congiungente gli estremi della curva data, ma scelta in modo opportuno, così che i calcoli risultino semplici.

1. Si calcoli il lavoro del campo

$$\mathbf{F}(x,y) = (y(y-2x), x(2y-x)+y)$$

lungo la curva di equazione $y = \sqrt{(x+1)} - \frac{1}{3}x$ con $x \in [0,3]$.

2. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (\mathrm{e}^x \cos\, y, -\mathrm{e}^x \mathrm{sen}\; y + y)$, si calcoli il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo la curva γ la cui equazione in coordinate polari e'

$$\rho(\theta) = 2(1+\cos\,\theta), \qquad \theta \in [0,\pi],$$

orientata nel verso delle θ crescenti.

3. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (y^2 \log x(\log x + 2), 2xy\log^2 x + e^y)$ e la curva γ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = (\cos t)^2 + 1 \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, orientata nel verso delle t crescenti, si calcoli $\int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathbf{d}r$.

4. Si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F}\cdot \mathbf{d}r$$

dove

$$\mathbf{F}(x,y) = (y^2 + xy^4, 2xy + 2x^2y^3 + 2e^{2y})$$

e γ è il grafico della funzione $y = \sin^2 x(1+\cos x) + \frac{x}{\pi} \quad x \in [0,\pi]$.

§**4.**

Nei prossimi esercizi il campo è irrotazionale ed è definito in un insieme non connesso, ma costituito da due componenti semplicemente connesse e quindi in ognuna di esse è conservativo, pertanto è ancora vero che:

- il lavoro lungo ogni curva chiusa è nullo,

- il lavoro lungo una curva non chiusa dipende solo dagli estremi della curva.

1. Si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}r$$

dove

$$\mathbf{F} = (-\frac{1}{2} \sin x \log |x^2 + 2y + 2| + \cos x \frac{x}{x^2 + 2y + 2}, \frac{\cos x}{x^2 + 2y + 2})$$

e γ e' la arco di parabola

$$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 + 1 \end{cases}$$

$t \in [0, 1]$, orientata nel verso delle t crescenti.

2. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x, y) = (\sqrt{\frac{4-y}{x+4}}, -\sqrt{\frac{x+4}{4-y}})$, si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x, y) \cdot \mathbf{d}s$$

dove γ e' la curva di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(t) = \cos^3(t) \\ y(t) = \sin^3(t) \\ t \in [0, \pi] \end{cases}$$

orientata nel verso delle t crescenti.

§**5.**

Nei prossimi esercizi il campo è irrotazionale, ed è definito in un insieme D connesso, ma non semplicemente connesso, il campo è quindi localmente conservativo. In questo caso:

- il lavoro lungo ogni curva chiusa che sia bordo di un insieme costituito di tutti punti di D è nullo,

invece

-il lavoro lungo una curva chiusa che non sia bordo di un insieme costituito di tutti punti di D, va calcolato usando la definizione o, se possibile, utilizzando il teorema di Gauss -Green. Si può anche utilizzare il seguente

Teorema. Sia $D = \mathbb{R}^2 - \{(x_0, y_0)\}$ e $\underline{F} : D \to$ sia irrotazionale. Siano γ_1 e γ_2 due curve chiuse contenute in D, entrambe bordo di un insieme che contiene il punto (x_0, y_0), allora $\int_{\gamma_1} \underline{Fdr} = \int_{\gamma_2} \underline{Fdr}$.

Da qui segue che se il lavoro lungo una curva chiusa che non é bordo di un insieme costituito di tutti punti di D é nullo, allora lo é lungo tutte le curve chiuse, e quindi il campo é conservativo.

1. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}, -\frac{xy}{(x^2+y^2)^2})$,

i) si dica se è irrotazionale;

ii) si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{d}r$$

dove γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1;

iii) si dica se è conservativo e, in caso affermativo, se ne calcoli un potenziale.

2. Dato il campo vettoriale $\mathbf{F}(x,y) = (-\frac{y-2}{(x^2+4(y-2)^2)}, \frac{x}{(x^2+4(y-2)^2)})$,

i) si dica se è irrotazionale;

ii) si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{d}r$$

dove γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1;

iii) si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x,y) \cdot \mathbf{d}r$$

dove γ è la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 4;

iii) si dica se è conservativo.

Esercizi Martedì 11 maggio

1. Sia $\underline{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = t \end{cases}.$$

Si calcolino

$$\int_0^{2\pi} \underline{r}(t)dt, \quad \left|\int_0^{2\pi} \underline{r}(t)dt\right|, \quad \int_0^{2\pi} |\underline{r}(t)|dt, \quad \int_0^{2\pi} |\underline{r}'(t)|dt$$

Sia γ il sostegno della curva $\underline{r}$ e siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ così definita $f(x, y, z) \equiv 1$, e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ così definita $g(x, y, z) = xy + z$, si calcolino

$$\int_\gamma f ds, \quad \int_\gamma g ds.$$

Sia γ orientata nel verso delle t crescenti, e siano $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita $\underline{F}(x, y, z) \equiv (1, 1, 1)$, e $\underline{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita $\underline{G}(x, y, z) = (xy, y, xz)$ si calcolino

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}, \quad \int_\gamma \underline{G} \cdot d\underline{r}.$$

2.
Sia $\underline{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t\cos t \\ y(t) = t\sin t \\ z(t) = t \end{cases}.$$

Si calcolino

$$\int_0^{2\pi} \underline{r}(t)dt, \quad \left|\int_0^{2\pi} \underline{r}(t)dt\right|, \quad \int_0^{2\pi} |\underline{r}(t)|dt, \quad \int_0^{2\pi} |\underline{r}'(t)|dt$$

Sia γ il sostegno della curva $\underline{r}$ e siano $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ così definita $f(x, y, z) \equiv 1$, e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ così definita $g(x, y, z) = \frac{x^2+y^2}{z} + z$, si calcolino

$$\int_\gamma f ds, \quad \int_\gamma g ds.$$

Sia γ orientata nel verso delle t crescenti, e siano $\underline{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita $\underline{F}(x, y, z) \equiv (1, 1, 1)$, e $\underline{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ così definita $\underline{G}(x, y, z) = (\frac{x}{z}, z, \frac{y}{z})$ si calcolino

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}, \quad \int_\gamma \underline{G} \cdot d\underline{r}.$$

3.

Si consideri la curva piana di equazione polare $\rho(t) = e^t$, con $t \in [0, 2\pi]$.

Si scriva la forma parametrica $\underline{r}(t)$ e si calcolino

$$\int_0^{2\pi} \underline{r}(t)dt, \quad |\int_0^{2\pi} \underline{r}(t)dt|, \quad \int_0^{2\pi} |\underline{r}(t)|dt, \quad \int_0^{2\pi} |\underline{r}'(t)|dt$$

Sia γ il sostegno della curva $\underline{r}$ e siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita $f(x, y) \equiv 1$, e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ così definita $g(x, y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$, si calcolino

$$\int_\gamma f ds, \quad \int_\gamma g ds.$$

Sia γ orientata nel verso delle t crescenti, e siano $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita $\underline{F}(x, y) \equiv (1, 1)$, e $\underline{G} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definita $\underline{G}(x, y) = (x, y)$ si calcolino

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}, \quad \int_\gamma \underline{G} \cdot d\underline{r}.$$

4.

Si consideri l'arco di circonferenza γ di equazioni

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$$

con $t \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

Si calcolino

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \underline{r}(t)dt, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\underline{r}(t)|dt, \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\underline{r}'(t)|dt.$$

Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $\underline{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ così definite $f(x, y) = \frac{x}{y}$ e $\underline{F}(x, y) = (\frac{x}{y}, x)$, si calcolino

$$\int_\gamma f ds$$

e, pensando γ orientata nel verso delle t crescenti,

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}.$$

5.

Si considerino l'arco di circonferenza γ di equazioni

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1-t^2} \end{cases}$$

con $t \in [\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ e le funzioni $f(x,y) = \frac{x}{y}$ e $\underline{F}(x,y) = (\frac{x}{y}, x)$. Si pensi, quando necessario, γ orientata nel verso delle t crescenti.

Si calcolino i seguenti integrali e si dica quali si potevano ricavare dall'esercizio precedente:

$$\int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \underline{r}(t)dt \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\underline{r}(t)|dt, \quad \int_{\frac{-1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} |\underline{r}'(t)|dt \quad \int_{\gamma} f ds \quad \int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{r}.$$