

Istituzioni di Matematica II
5 Luglio 2010

1. Classificare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la forma quadratica

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)x^2 + 4xy + \alpha y^2.$$

2. i) Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione

$$f(x, y) = e^{-(x+y^2)}x^2y$$

ristretta all'insieme $\{x^2 + y^2 < 1\}$ e se ne studi la natura.

ii) Si trovi il versore che indica la direzione di massima crescita della funzione $f(x, y)$ nel punto $(1, 1)$.

3. Si dimostri che il campo $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2 + e^y)$ è conservativo e si trovi quel potenziale $U(x, y)$ tale che $U(1, 0) = 2$.

4. i) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 8y = e^x$$

e dire qual'è il loro dominio.

ii) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

iii) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0.$$

5. Calcolare

$$\int \int_D \frac{y}{1+x^2} dx dy$$

dove D è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Istituzioni di Matematiche II
5 Luglio 2010
Soluzioni

1. Classificare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la forma quadratica

$$\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right)x^2 + 4xy + \alpha y^2.$$

Soluzioni.

$$\text{La forma è } \left\{ \begin{array}{l} \text{semidefinita positiva, se } \begin{cases} |A| = 0 \\ 1 + \frac{\alpha}{2} > 0 \end{cases} \\ \text{semidefinita negativa, se } \begin{cases} |A| = 0 \\ 1 + \frac{\alpha}{2} < 0 \end{cases} \\ \text{indefinita se } |A| < 0 \\ \text{definita positiva, se } \begin{cases} |A| > 0 \\ 1 + \frac{\alpha}{2} > 0 \end{cases} \\ \text{definita negativa, se } \begin{cases} |A| > 0 \\ 1 + \frac{\alpha}{2} < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

dove

$$|A| = \det \begin{pmatrix} 1 + \frac{\alpha}{2} & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha - 8).$$
$$\alpha^2 + 2\alpha - 8 \begin{cases} = 0 & \text{se } \alpha = 2, -4 \\ < 0 & \text{se } -4 < \alpha < 2 \\ > 0 & \text{se } \alpha < -4 \text{ oppure se } \alpha > 2 \end{cases}$$
$$1 + \frac{\alpha}{2} \begin{cases} > 0 & \text{se } \alpha > -2 \\ < 0 & \text{se } \alpha < -2 \end{cases}$$

quindi la forma è semidefinita positiva se $\alpha = 2$, semidefinita negativa se $\alpha = -4$, indefinita se $-4 < \alpha < 2$, definita positiva se $\alpha > 2$, definita negativa se $\alpha < -4$.

2. i) Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione

$$f(x, y) = e^{-(x+y^2)} x^2 y$$

ristretta all'insieme $\{x^2 + y^2 < 1\}$ e se ne studi la natura.

ii) Si trovi il versore che indica la direzione di massima crescita della funzione $f(x, y)$ nel punto $(1, 1)$.

Soluzioni. i) I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x, y) = e^{-(x+y^2)}xy(2-x) = 0 \\ f_y(x, y) = e^{-(x+y^2)}x^2(1-2y^2) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione si annulla per $x = 0$, $y = 0$ e $x = 2$, la seconda si annulla per $x = 0$ e per $y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi le soluzioni del sistema sono $(0, y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $(2, \pm \frac{1}{\sqrt{2}})$. I due ultimi punti non appartengono all'insieme considerato.

$$f(0, y) = 0,$$

$$f(x, y) \begin{cases} > 0 \text{ se } y > 0 \\ < 0 \text{ se } y < 0 \end{cases}$$

quindi i punti $(0, y)$ con $y > 0$ sono di minimo, i punti $(0, y)$ con $y < 0$ sono di massimo, $(0, 0)$ è punto di sella.

ii) La direzione di massima crescita è quella del gradiente $\nabla f(1, 1) = e^{-2}(1, -1)$, il cui versore è $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$.

3. Si dimostri che il campo $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2 + e^y)$ è conservativo e si trovi quel potenziale $U(x, y)$ tale che $U(1, 0) = 2$.

Soluzioni. Il campo è definito in \mathbb{R}^2 , che è semplicemente connesso, ed è irrotazionale infatti

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + e^y)}{\partial x} = 2x.$$

I potenziali sono le funzioni $U(x, y)$ tali che

$$\begin{cases} \frac{\partial(U(x, y))}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial(U(x, y))}{\partial y} = x^2 + e^y \end{cases}$$

Quindi

$$U(x, y) = \int 2xy dx = x^2y + g(y)$$

dove $g'(y) = e^y$.

$$U(x, y) = x^2y + e^y + k.$$

Da $U(1, 0) = 1 + k = 2$ segue $k = 1$.

Il potenziale cercato è

$$U(x, y) = x^2y + e^y + 1.$$

4. i) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 8y = e^x$$

e dire qual'è il loro dominio.

ii) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

iii) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) = 0.$$

Soluzioni. i) Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

sono $\lambda = 2(-1 \pm i)$.

L'integrale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

è quindi $y_o(x) = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

Utilizzando il metodo di somiglianza cerchiamo un integrale della equazione completa della forma $\bar{y}(x) = ae^x$. Sostituendo questa funzione con le sue derivate nell'equazione

$$ae^x + 4ae^x + 8ae^x = e^x$$

otteniamo $a = \frac{1}{13}$.

L'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{13}e^x.$$

ii)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{13}e^x = 0 + \infty = +\infty$$

per ogni c_1, c_2 , quindi non ci sono soluzioni per cui

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = 0.$$

iii)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-2x}(c_1 \cos 2s + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{13}e^x = 0$$

se $c_1 = c_2 = 0$, se invece $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ il limite non esiste.

5. Calcolare

$$\int \int_D \frac{y}{1+x^2} dx dy$$

dove D è il triangolo di vertici $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$.

Soluzioni. I metodo.

$$\begin{aligned}\int \int_D \frac{y}{1+x^2} dx dy &= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} \int_0^{-x+1} y dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{(-x+1)^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{2x}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{2} (1 - \log 2).\end{aligned}$$

II metodo (teorema di Green-Gauss).

$$\int \int_D \frac{y}{1+x^2} dx dy = - \int_{\gamma} \frac{1}{2} \frac{y^2}{1+x^2} dx$$

dove γ è il bordo di D orientato positivamente.

$$\text{Posto } \gamma_1 = \begin{cases} x = 0 \\ y \in [0, 1] \end{cases}, \quad \gamma_2 = \begin{cases} x \in [0, 1] \\ y = -x + 1 \end{cases}, \quad \gamma_3 = \begin{cases} x \in [0, 1] \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}- \int_{\gamma} \frac{1}{2} \frac{y^2}{1+x^2} dx &= \int_{\gamma_1} \frac{1}{2} \frac{y^2}{1+x^2} dx + \int_{\gamma_2} \frac{1}{2} \frac{y^2}{1+x^2} dx - \int_{\gamma_3} \frac{1}{2} \frac{y^2}{1+x^2} dx = \\ &= \int_{\gamma_2} \frac{1}{2} \frac{y^2}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{1}{2} \frac{(-x+1)^2}{1+x^2} dx\end{aligned}$$

$$\text{infatti } \int_{\gamma_1} \frac{1}{2} \frac{y^2}{1+x^2} dx = \int_{\gamma_3} \frac{1}{2} \frac{y^2}{1+x^2} dx = 0.$$

Istituzioni di Matematica II
15 Luglio 2010

1. Si scriva in forma algebrica e in forma di Eulero il numero

$$\frac{(1 + i\sqrt{3})^{21}}{(1 - i)^{28}}$$

2. Si trovino le coordinate del baricentro della curva di equazione polare

$$\rho = 2 \cos \theta \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

3. Si trovino tutti i punti critici delle funzione

$$z = x^2 y^2 (1 - x - y)$$

e se ne studi la natura.

4. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' = \sinh x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

5. Sia

$$\mathbf{F}(x, y) = (ye^{xy} + 1, xe^{xy} - 1)$$

Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$$

dove γ è la curva di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos \pi t \\ y(t) = t^2 \sin \pi t \\ t \in [0, 1] \end{cases}$$

orientata nel verso delle t crescenti

Istituzioni di Matematica II
13 Settembre 2010

1. Si scrivano parte reale e coefficiente dell'immaginario del numero

$$\frac{(1 - i\sqrt{3})^{21}}{(1 + i)^{28}}$$

2. Si calcoli

$$\int \int_D x dx dy$$

dove D è l'insieme dei punti del primo quadrante delimitato dalla retta passante per i punti $(1,0)$ e $(0,1)$ e dalla circonferenza di centro l'origine e raggio 1.

3. Si dimostri che la funzione

$$f(x, y) = e^{x-y}(x - 2y)$$

ristretta al triangolo chiuso di vertici $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$, ammette massimo e minimo e li si calcolino.

4. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' + \frac{y}{x} - \frac{e^x}{x} = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

5. Sia

$$\mathbf{F}(x, y) = (x^2, y^2).$$

Calcolare

$$\int_{\gamma} \mathbf{F}(x, y) \cdot d\mathbf{r}$$

dove γ è la curva di equazioni

$$\begin{cases} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t, \\ t \in [0, \pi] \end{cases}$$

orientata nel verso delle t decrescenti.

Istituzioni di Matematica II
24.09.2010

1. Si trovino gli autovalori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 3 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Si dimostri che \mathbb{R}^3 ammette una base fatta di autovettori della matrice A .
Si trovi una base di \mathbb{R}^3 fatta di autovettori della matrice A .

2. Si calcolino massimo e minimo della funzione

$$f(x, y) = x^2 y^2$$

soggetta al vincolo $x^2 + y^2 = 1$.

3. Si risolvano i seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 - y}{x} \\ y(1) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y' = \frac{y^2 - y}{x} \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

e si trovino i più ampi intervalli in cui sono definite le soluzioni.

4. Sia γ l'arco di curva

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ z(t) = e^t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

orientato nel verso delle t crescenti.

i) Calcolare il lavoro lungo γ del campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x, y) = (xz, yz, \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2).$$

4. Calcolare

$$\int \int_D e^{xy} (xy - 1) dx dy$$

dove $D = \{(x, y) : 1 \leq x \leq e, 0 \leq y \leq \frac{1}{x}\}$.