Istituzioni di Matematica II
3 luglio 2014

1. i) Si dica se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

é diagonalizzabile.

ii) Si studi il carattere della forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xz$$

Soluzioni. i) La matrice é simmetrica e perció é diagonalizzabile. Una matrice diagonale simile alla matrice A ha sulla diagonale gli autovalori di A.

Gli autovalori di A sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$|A - \lambda I| = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} =$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)(-\lambda) - (2-\lambda) = (2-\lambda)(\lambda(\lambda-1)-1) = (2-\lambda)(\lambda^2-\lambda-1)$$

$(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0$ per $\lambda = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ e quindi li autovalori di A sono

$$\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

Una matrice diagonale simile alla matrice A é

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

ii) Alla forma quadratica

$$q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xz$$

é associata la matrice A del punto i) , infatti

$$x^2 + 2y^2 + 2xz = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

La forma quadratica q é indefinita, infatti la matrica A ha due autovalori positivi (2 e $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$), e uno negativo ($\frac{1-\sqrt{5}}{2}$).

2. Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x} \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

Soluzioni. L'equazione omogenea associata

$$y'' - 2y' + y = 0$$

ha equazione caratteristica

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

che ha un'unica soluzione $\lambda = 1$.

L'integrale generale dell'equazione omogenea é quindi

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x.$$

Un integrale particolare della non omogenea si puó cercare solo usando il metodo della variazione delle costanti, perché il termine $\frac{e^x}{x}$ non ha la forma

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos(\beta x) + Q(x)\sin(\beta x))$$

con $P(x)$ e $Q(x)$ polinomi.

Cerchiamo quindi un integrale della forma

$$\overline{y}(x) = c_1(x)e^x + c_2(x)xe^x$$

dove le derivate delle funzioni $c_1(x)$ e $c_2(x)$ soddisfano il sistema

$$\begin{cases} c_1'(x)e^x + c_2'(x)xe^x = 0 \\ c_1'(x)e^x + c_2'(x+1)e^x = \frac{e^x}{x} \end{cases}$$

Utilizzando il teorema di Cramer si ottiene

$$c_1'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x} & (x+1)e^x \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}} = -\frac{e^{2x}}{e^{2x}} = -1$$

$$c_2'(x) = \frac{\det\begin{pmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{pmatrix}} = \frac{\frac{e^{2x}}{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{x}$$

Da cui segue

$$c_1(x) = x, \quad c_2(x) = \log|x|$$

$$\overline{y}(x) = xe^x + \log|x|xe^x$$

L'integrale generale dell'equazione completa é

$$y(x) = c_1 e^x + c_2 xe^x + xe^x + \log|x|xe^x$$

la derivata é

$$y'(x) = c_1 e^x + (c_2+1)(x+1)e^x + (1 + \log|x| + \log|x|x)e^x.$$

Ponendo

$$\begin{cases} y(1) = 0 \\ y'(1) = 0 \end{cases}$$

si ottiene il sistema lineare

$$\begin{cases} (c_1 + c_2 + 1)e = 0 \\ (c_1 + 2c_2 + 3)e = 0 \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = -1 \\ c_1 + 2c_= - 3 \end{cases}$$

che ha soluzioni $(c_1 = 1, c_2 = -2)$. La soluzione del problema di cauchy assegnato é

$$y(x) = e^x - xe^x + x\log(x)e^x$$

3. Si calcoli

$$\int_\gamma (x+y)\, ds$$

dove γ é il sostegno della curva di equazione polare $\begin{cases} \rho(\theta) = 2 \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases}$

Soluzioni. La curva assegnata é la semicirconferenza di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x(\theta) = 2\cos\theta \\ y(\theta) = 2\sin\theta \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases}$$

Il modulo del vettore derivato é 2.

$$\int_\gamma (x+y)\, ds = \int_0^\pi 4(\cos\theta + \sin\theta)d\theta = 4(\sin\pi - \sin 0 - (cos\pi - cos0)) = 8$$

4. Si trovino i punti critici della funzione

$$f(x,y) = e^{(x-y)}(x^2 - 2y^2)$$

e se ne studi la natura.

Soluzioni. I punti critici sono le soluzioni dell'equazione

$$\nabla f(x,y) = (0,0)$$

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} e^{(x-y)}(x^2 - 2y^2 + 2x) = 0 \\ e^{(x-y)}(-x^2 + 2y^2 - 4y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 + 2x = 0 \\ -x^2 + 2y^2 - 4y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 2y^2 = -2x \\ x^2 - 2y^2 = -4y \end{cases}$$

da cui segue

$$x = 2y$$

che sostituito in una delle due equazioni da

$$2y(y+2) = 0$$

I punti critici sono quindi $(0,0)$ e $(-4,-2)$.

$f_{xx}(x,y) = e^{(x-y)}(x^2 - 2y^2 + 4x + 2)$
$f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y)e^{(x-y)}(-x^2 + 2y^2 - 2x - 4y)$
$f_{yy}(x,y) = e^{(x-y)}(x^2 - 2y^2 + 8y - 4)$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{xy}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Dal momento che $\det Hf(0,0) = -8 < 0$ $(0,0)$ é un punto di sella.

$$Hf(-4,-2) = e^2 \begin{pmatrix} -6 & 8 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}$$

Dal momento che $\det Hf(-4,-2) = 8 > 0$ e $f_{xx}(-4,-2) = -6 < 0$, il punto $(-4,-2)$ é di massimo locale.

5. i) Si calcoli

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x,y)\cdot \mathbf{dr}$$

dove

$$\mathbf{F}(x,y)=\log(x^2+y^2)(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})$$

e γ é l'ellisse di equazioni $2x^2+3y^3=1$ orientata in verso antiorario.

ii) si dica se il campo

$$\mathbf{F}(x,y)$$

é conservativo.

Soluzioni. i) Il campo

$$\mathbf{F}(x,y)=\log(x^2+y^2)(\frac{x}{x^2+y^2},\frac{y}{x^2+y^2})=(\log(x^2+y^2)\frac{x}{x^2+y^2},\log(x^2+y^2)\frac{y}{x^2+y^2})$$

é irrotazionale, infatti

$$\frac{\partial \log(x^2+y^2)\frac{x}{x^2+y^2}}{\partial y}=\frac{\partial \log(x^2+y^2)\frac{y}{x^2+y^2}}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}(1-\log(x^2+y^2)).$$

Il dominio di $\mathbf{F}(x,y)$ é $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$.

L'ellisse data é una curva chiusa bordo di un insieme che contiene il punto $(0,0)$ e quindi, per l'irrotazionalitá di $\mathbf{F}(x,y)$, il lavoro del campo lungo l'ellisse é uguale al lavoro lungo una qualunque altra curva chiusa bordo di un insieme che contiene il punto $(0,0)$. Scegliendo come curva la circonferenza di centro l'origine e raggio 1, il calcolo dell'integrale diventa estremamente semplice. Infatti le equazioni parametriche sono

$$\begin{cases} x(\theta)=\cos\theta \\ y(\theta)=\sin\theta \\ \theta\in[0,2\pi]) \end{cases}$$

e quindi, indicato con $\overline{\gamma}$ il sostegno della circonferenza,

$$\int_{\overline{\gamma}} \mathbf{F}(x,y)\cdot \mathbf{dr}=\int_0^{2\pi}\log(1)(\cos\theta(-\sin\theta)+\sin\theta\cos\theta)\,d\theta=0$$

Come detto, per l'irrotazionalitá di $\mathbf{F}(x,y)$, anche

$$\int_\gamma \mathbf{F}(x,y)\cdot \mathbf{dr}=0$$

ii) $\mathbf{F}(x,y)$ é conservativo perché il suo lavoro lungo ogni curva chiusa é nullo.

Infatti, $\mathbf{F}(x,y)$ é irrotazionale in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ e quindi, se una curva é bordo di un insieme che non contiene il punto $(0,0)$, si puó considerare $\mathbf{F}_D$ dove D é un insieme semplicemente connesso che contiene la curva. In D $\mathbf{F}$ é conservativo e quindi il lavoro lungo la curva é nullo. Se invece una curva é bordo di un insieme che contiene il punto $(0,0)$, per il punto precedente, il lavoro di $\mathbf{F}$ é nullo.

6. Si calcoli

$$\int\int_D (x+y)\,dxdy$$

dove

$$D = \{(x,y) : x \geq 0, \;\; y \geq 0 \quad x^2+y^2 \leq 1 \quad x+y \geq 1\}$$

Soluzioni.

I metodo (riduzione).

$$\int\int_D (x+y)\,dxdy = \int_0^1 (\int_{y=-x+1}^{y=\sqrt{1-x^2}} (x+y)\,dy)\,dx =$$

$$\int_0^1 (xy + \frac{y^2}{2})|_{y=-x+1}^{y=\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int_0^1 (x\sqrt{1-x^2} + \frac{1-x^2}{2} - x(-x+1) - \frac{(-x+1)^2}{2})\,dx =$$

$$\int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}|_0^1 = \frac{1}{3}$$

II metodo (Gauss-Green).

D é (per esempio) y-semplice e quindi

$$\int\int_D (x+y)\,dxdy = -\int_{\partial D^+} (xy + \frac{y^2}{2})\,dx$$

dove

$$\partial D^+ = \gamma_1 \cup \gamma_2$$

e γ_1 é il sostegno di

$$\mathbf{r_1}(t) \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = -t+1 \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

orientato nel verso delle t crescenti,

γ_2 é il sostegno di

$$\mathbf{r_2}(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \sqrt{1-t^2} \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

orientato nel verso delle t decrescenti. (Oppure di

$$\mathbf{r_2}(t) = \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t \\ t \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

orientato nel verso delle t crescenti.)

$$\int_{\gamma_1} (xy + \frac{y^2}{2})\, dx + \int_{\gamma_2} (xy + \frac{y^2}{2})\, dx =$$

$$\int_0^1 (t(-t+1) + \frac{(-t+1)^2}{2})\, dt + \int_1^0 (t\sqrt{1-t^2} + \frac{1-t^2}{2})\, dt = \int_0^1 -t\sqrt{1-t^2})\, dt = \frac{1}{3}$$