Istituzioni di matematica II
4 luglio 2013
Soluzioni

1. Si risolva il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -(x-1)^3 y \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Si dimostri che se $y_0 > 0$ la soluzione ha massimo.
Si calcoli il massimo nel caso $y_0 = 1$.
Soluzione. L'equazione é a variabili separabili.
$y = 0$ é l'unica soluzione costante ed é la soluzione del problema di Cauchy se $y_0 = 0$.
Le altre soluzioni si ottengono risolvendo l'equazione

$$\int \frac{1}{y}\,dy|_{y=y(x)} = -\int (x-1)^3\,dx$$

$$\log|y(x)| = -\frac{(x-1)^4}{4} + c$$

$$y(x) = ke^{-\frac{(x-1)^4}{4}}$$

Da

$$y(0) = ke^{-\frac{1}{4}} = y_0$$

segue

$$k = y_0 e^{\frac{1}{4}}$$

e

$$y(x) = y_0 e^{\frac{1-(x-1)^4}{4}}$$

Se $y_0 > 0$, anche $y(x) > 0$ per ogni x e quindi

$$y'(x) = -(x-1)^3 y(x)$$

ha il segno di $-(x-1)^3$. Perció

$$y'(x)\begin{cases} = 0 & x = 1 \\ > 0 & x < 1 \\ < 0 & x > 1 \end{cases}$$

$x = 1$ é punto di massimo assoluto e $y(1) = y_0 e^{\frac{1}{4}}$ é massimo assoluto.

Se $y_0 = 1$ il massimo é $y(1) = e^{\frac{1}{4}}$.

2. Dati i tre vettori di $\mathbb{R}^3$

$$v_1 = (\alpha, 1, 1), \quad v_2 = (3\alpha, \alpha, 2), \quad v_3 = (4, 2\alpha), 4$$

(i) si determini $\alpha \in \mathbb{R}$ in modo che $< v_1, v_2, v_3 >= \mathbb{R}^3$;
(ii) si trovino tutti gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $(1, 0, 0) \in < v_1, v_2, v_3 >$.

Soluzione.

i) I tre vettori generano $\mathbb{R}^3$ se sono linearmente indipendenti e quindi se

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 4 \\ 1 & \alpha & 2\alpha \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \neq 0$$

L'equazione

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 4 \\ 1 & \alpha & 2\alpha \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = 2(3\alpha^2 - 8\alpha + 4) = 0$$

ha soluzioni $\alpha = 2$ e $\alpha = \frac{2}{3}$.

I tre vettori generano $\mathbb{R}^3$ se $\alpha \neq 2, \frac{2}{3}$.

ii) $(1, 0, 0) \in < v_1, v_2, v_3 >$, se le matrici

$$\begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 4 \\ 1 & \alpha & 2\alpha \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

e

$$\begin{pmatrix} \alpha & 3\alpha & 4 & 1 \\ 1 & \alpha & 2\alpha & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

hanno lo stesso rango.

Se $\alpha \neq 2, \frac{2}{3}$, entrambe le matrici hanno rango 3. In questo caso infatti $< v_1, v_2, v_3 >= \mathbb{R}^3$ e quindi ogni vettore $v \in \mathbb{R}^3$ (e quindi anche $(1, 0, 0)$) appartiena a $< v_1, v_2, v_3 >$, .

Se $\alpha = 2$, entrambe le matrici hanno rango 2, infatti la seconda matrice ha due righe uguali

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi tutti le matrici quadrate di dimensione 3 hanno determinante nullo, mentre la prima matrice (e quindi anche la seconda) hanno un determinante $2X2$ diverso da 0, per esempio

$$\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Se $\alpha = \frac{2}{3}$, la prima matrice ha rango < 3 (2), infatti la terza colonna é uguale a 2 volte la seconda,

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & 4 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

mentre la seconda matrice ha rango 3

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & 4 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

infatti il minore

$$\det \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \neq 0$$

3. Calcolare la massa di un filo di densita' lineare $\rho(x, y,) = x^2\sqrt{1+4y}$, posto lungo la curva $y = x^2$, $\ -1 \le x \le 1$.

Soluzione. Le equazioni parametriche della curva data sono

$$\mathbf{r}(x) = \begin{cases} x = x \\ y = x^2 \end{cases}$$

Il vettore derivato ha equazioni parametriche

$$\mathbf{r}'(x) = \begin{cases} x' = 1 \\ y' = 2x \end{cases}$$

e modulo $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1+4x^2}$.

$$m = \int_\gamma \rho(x, y)ds = \int_{-1}^{1} \rho(\mathbf{r}(x))|\mathbf{r}'(x)|dx = \int_{-1}^{1} (x^2\sqrt{1+4x^2})\sqrt{1+4x^2}dx =$$

$$\int_{-1}^{1} x^2(1+4x^2)dx = \int_{-1}^{1} (x^2+4x^4)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{5}x^5|_{-1}^{1} = 2(\frac{1}{3} + \frac{4}{5}) = \frac{34}{15}$$

4. Si calcolino massimo e minimo assoluto della funzione $f(x, y) = 12x + 16y$, ristretta all'insieme

$D = \{(x, y) : (x-1)^2 + y^2 \le 4\}$.

Soluzione. La funzione é continua in un insieme chiuso e limitato, perció ha massimo e minimo.

La funzione é differenziabile e quindi, per il teorema di Fermat, negli eventuali punti di estremo interni $\text{grad} f(x, y) = (0, 0)$.

grad$f(x, y) = (12, 10)$. Dal momento che $f(x, y)$ non ha punti critici, il massimo e il minimo sono assunti sul bordo.

I punti critici della Lagrangiana sono le soluzion del sistema

$$\begin{cases} 12 - 2\lambda(x-1) = 0 \\ 16 - 2\lambda y = 0 \\ (x-1)^2 + y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

La prima equazioni ha soluzioni $(x = \frac{6}{\lambda} + 1, y, \lambda)$, la seconda ha soluzione $(x, y = \frac{8}{\lambda}, \lambda)$, sostituendo questi valori nella terza equazione si ottinene $\lambda = \pm 5$

I punti critici della Lagrangiana sono $(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}, 5)$ e $(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}, -5)$ e i punti di estremo vincolato per la funzione sono $(\frac{11}{5}, \frac{8}{5})$ e $(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5})$.

max$f(x, y) = f(\frac{11}{5}, \frac{8}{5}) = 52$, min$f(x, y) = f(-\frac{1}{5}, -\frac{8}{5}) = -28$,

5. Dato il campo

$$\mathbf{F}(x, y) = (2xy + y^2 - \frac{y-1}{x^2 + (y-1)^2}, x^2 + 2xy + \frac{x}{x^2 + (y-1)^2})$$

i) se ne trovi il dominio;

ii) se ne calcoli il lavoro lungo le seguenti corve:

- γ_1, bordo orientato positivsamente dell'insieme $D = \{(x, y) : -2 \leq x \leq 2, -4 \leq y \leq x^2\}$

- γ_2 composta dall'arco di parabola $y = x^2$, $-2 \leq x \leq 2$ e dal segmento di estremi $(-2, 4)$ e $(2, 4)$, orientata in verso antiorario.

Soluzione. Dominio di $\mathbf{F} = R^2 - \{(0, 1)\}$

Il campo é irrotazionale, infatti, posto $F_1 = 2xy + y^2 - \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}$ e $F_2 = x^2 + 2xy + \frac{x}{x^2+(y-1)^2}$,

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x + 2y + \frac{(y-1)^2 - x^2}{(x^2 + (y-1)^2)^2}$$

- γ_1 é una curva chiusa contenuta in $D_1 = \mathbb{R}^2 - \{(0, y) : y \geq 1\} \subseteq$ Dominio di $\mathbf{F}$.

D_1 é semplicemente connesso e quindi $\mathbf{F}|_{D_1}$ é conservativo e

$$\int_{\gamma_1} \mathbf{F} \mathbf{d} r = 0$$

- γ_2 é una curva chiusa bordo orientato positivamente di un insieme D_2 che contiene il punto $(0, 1)$. Del momento che il campo é irrotazionale, per il teorema di Gauss-Green, per ogni altra curva chiusa γ, bordo orientato positivamente di un insieme che contiene il punto $(0, 1)$, si ha

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F} \mathbf{d} r = \int_{\gamma} \mathbf{F} \mathbf{d} r.$$

L'espressione del campo suggerisce di sceglire come γ una circonferenza centrata in $(0,1)$; per esmpio quella di raggio 1. Le equazioni parametriche di questa curva sono

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin t + 1 \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Per semplificare i conti possiamo osservare che $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \mathbf{H}$ dove

$$\mathbf{G}(x,y) = (2xy + y^2, x^2 + 2xy)$$

e

$$\mathbf{H}(x,y) = (-\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2}, \frac{x}{x^2+(y-1)^2}).$$

Per la linearitá dell'integrale

$$\int_\gamma \mathbf{F}\mathbf{d}r = \int_\gamma \mathbf{G}\mathbf{d}r + \int_\gamma \mathbf{H}\mathbf{d}r$$

Dal momento che $\mathbf{G}(x,y)$ é conservativo, perché é irrotazionale in $\mathbb{R}^2$,

$$\int_\gamma \mathbf{G}\mathbf{d}r = 0$$

e quindi

$$\int_\gamma \mathbf{F}\mathbf{d}r = \int_\gamma \mathbf{H}\mathbf{d}r$$

$$\int_\gamma \mathbf{H}\mathbf{d}r = \int_0^{2\pi} ((-\sin t)^2 + \cos^2 t)dt = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi.$$

Concludendo

$$\int_{\gamma_2} \mathbf{F}\mathbf{d}r = 2\pi.$$

6. Si calcoli l'area dell'insieme piano delimitato dalla curva chiusa di equazione polare $\rho = \sin^{\frac{3}{2}} \theta,\ \theta \in [0, \pi]$.

Soluzione. Detto D l'insieme considerato, la sua area é data da

$$\int\int_D dxdy$$

Passando in coordinate polari, l'insieme diventa

$$D' = \{(\theta.\rho); 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \rho \leq \sin^{\frac{3}{2}} \theta\}$$

Integrando prima per sostituzione e poi iterando, si ha

$$\int\int_D dxdy = \int\int_{D'} \rho d\rho d\theta = \int_0^\pi (\int_0^{\sin^{\frac{3}{2}}(\theta)} \rho\, d\rho)d\theta =$$

$$\int_0^\pi \frac{\sin^3(\theta)}{2} d\theta = \frac{1}{2}\int_0^\pi (1-\cos^2(\theta))\sin(\theta)d\theta = \frac{1}{2}(-\cos(\theta) + \frac{1}{3}\cos^3(\theta)|_0^\pi) = \frac{2}{3}$$