Istituzioni di Matematica II
5 Luglio 2010

1. Classificare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la forma quadratica

$$(1 + \frac{\alpha}{2})x^2 + 4xy + \alpha y^2.$$

2. i) Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione

$$f(x, y) = e^{-(x+y^2)}x^2 y$$

ristretta all'insieme $\{x^2 + y^2 < 1\}$ e se ne studi la natura.

ii) Si trovi il versore che indica la direzione di massima crescita della funzione $f(x, y)$ nel punto $(1, 1)$.

3. Si dimostri che il campo $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2 + e^y)$ è conservativo e si trovi quel potenziale $U(x, y)$ tale che $U(1, 0) = 2$.

4. i) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 8y = e^x$$

e dire qual'è il loro dominio.

ii) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = 0.$$

iii) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} y(x) = 0.$$

5. Calcolare

$$\int\int_D \frac{y}{1 + x^2} dxdy$$

dove D è il triangolo di vertici $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$.

Istituzioni di Matematiche II
5 Luglio 2010
Soluzioni

1. Classificare, al variare del parametro $\alpha \in \mathbb{R}$, la forma quadratica

$$(1+\frac{\alpha}{2})x^2 + 4xy + \alpha y^2.$$

Soluzioni.

$$\text{La forma è} \begin{cases} \text{semidefinta positiva, se} \begin{cases} |A| = 0 \\ 1+\frac{\alpha}{2} > 0 \end{cases} \\ \text{semidefinta negativa, se} \begin{cases} |A| = 0 \\ 1+\frac{\alpha}{2} < 0 \end{cases} \\ \text{indefinta se } |A| < 0 \\ \text{defінta positiva, se} \begin{cases} |A| > 0 \\ 1+\frac{\alpha}{2} > 0 \end{cases} \\ \text{definita negativa, se} \begin{cases} |A| > 0 \\ 1+\frac{\alpha}{2} < 0 \end{cases} \end{cases}$$

dove

$$|A| = \det \begin{pmatrix} (1+\frac{\alpha}{2}) & 2 \\ 2 & \alpha \end{pmatrix} = \frac{1}{2}(\alpha^2 + 2\alpha - 8).$$

$$\alpha^2 + 2\alpha - 8 \begin{cases} = 0 \text{ se } \alpha = 2, -4 \\ < 0 \text{ se } -4 < \alpha < 2 \\ > 0 \text{ se } \alpha < -4 \text{ oppure se } \alpha > 2 \end{cases}$$

$$1+\frac{\alpha}{2} \begin{cases} > 0 \text{ se } \alpha > -2 \\ < 0 \text{ se } \alpha < -2 \end{cases}$$

quindi la forma è semidefinita positiva se $\alpha = 2$, semidefinita negativa se $\alpha = -4$, indefinita se $-4 < \alpha < 2$, definita positiva se $\alpha > 2$, definita negativa se $\alpha < -4$.

2. i) Si determinino tutti i punti critici della seguente funzione

$$f(x,y) = e^{-(x+y^2)}x^2y$$

ristretta all'insieme $\{x^2+y^2<1\}$ e se ne studi la natura.

ii) Si trovi il versore che indica la direzione di massima crescita della funzione $f(x,y)$ nel punto $(1,1)$.

Soluzioni. i) I punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} f_x(x,y) = e^{-(x+y^2)}xy(2-x) = 0 \\ f_y(x,y) = e^{-(x+y^2)}x^2(1-2y^2) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione si annulla per $x = 0$, $y = 0$ e $x = 2$, la seconda si annulla per $x = 0$ e per $y = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, quindi le soluzioni del sistema sono $(0,y)$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ e $(2, \pm\frac{1}{\sqrt{2}})$. I due ultimi punti non appartengono all'insieme considerato.

$f(0,y) = 0$,

$$f(x,y)\begin{cases} > 0 \text{se } y > 0 \\ < 0 \text{se } y < 0 \end{cases}$$

quindi i punti $(0,y)$ con $y > 0$ sono di minimo, i punti $(0,y)$ con $y < 0$ sono di massimo, $(0,0)$ è punto di sella.

ii) La direzione di massima crescita è quella del gradiente $\nabla f(1,1) = e^{-2}(1,-1)$, il cui versore è $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$.

3. Si dimostri che il campo $\mathbf{F}(x,y) = (2xy, x^2 + e^y)$ è conservativo e si trovi quel potenziale $U(x,y)$ tale che $U(1,0) = 2$.

Soluzioni. Il campo è definito in $\mathbb{R}^2$, che è semplicemente connesso, ed è irrotazionale infatti

$$\frac{\partial(2xy)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 + e^y)}{\partial x} = 2x.$$

I potenziali sono le funzioni $U(x,y)$ tali che

$$\begin{cases} \frac{\partial(U(x,y))}{\partial x} = 2xy \\ \frac{\partial(U(x,y))}{\partial y} = x^2 + e^y \end{cases}$$

Quindi

$$U(x,y) = \int 2xydx = x^2y + g(y)$$

dove $g'(y) = e^y$.

$$U(x,y) = x^2y + e^y + k.$$

Da $U(1,0) = 1 + k = 2$ segue $k = 1$.

Il potenziale cercato è

$$U(x,y) = x^2y + e^y + 1.$$

4. i) Determinare tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 8y = e^x$$

e dire qual'è il loro dominio.

ii) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

iii) Dire se esistono soluzioni $y(x)$ tali che

$$\lim_{x\to-\infty} y(x) = 0.$$

Soluzioni. i) Le soluzioni dell'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 8 = 0$$

sono $\lambda = 2(-1 \pm i)$.

L'integrale dell'equazione omogenea associata

$$y'' + 4y' + 8y = 0$$

è quindi $y_o(x) = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$.

Utilizzando il metodo di somiglianza cerchiamo un integrale della equazione completa della forma $\overline{y}(x) = ae^x$. Sostituendo questa funzione con le sue derivate nell'equazione

$$ae^x + 4ae^x + 8ae^x = e^x$$

otteniamo $a = \frac{1}{13}$.

L'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{13}e^x.$$

ii)

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{13}e^x = 0 + \infty = +\infty$$

per ogni c_1, c_2, quindi non ci sono soluzioni per cui

$$\lim_{x\to+\infty} y(x) = 0.$$

iii)

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-2x}(c_1 \cos 2s + c_2 \sin 2x) + \frac{1}{13}e^x = 0$$

se $c_1 = c_2 = 0$, se invece $(c_1, c_2) \neq (0, 0)$ il limite non esiste.

5. Calcolare

$$\int\int_D \frac{y}{1+x^2} dxdy$$

dove D è il triangolo di vertici $(0,0),(1,0),(0,1)$.

Soluzioni. I metodo.

$$\int\int_D \frac{y}{1+x^2}dxdy = \int_0^1 (\frac{1}{1+x^2}\int_0^{-x+1} y\,dy)dx =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{(-x+1)^2}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^1 (1-\frac{2x}{1+x^2})dx = \frac{1}{2}(1-\log 2).$$

II metodo (teorema di Green-Gauss).

$$\int\int_D \frac{y}{1+x^2}dxdy = -\int_\gamma \frac{1}{2}\frac{y^2}{1+x^2}dx$$

dove γ è il bordo di D orientato positivamente.

Posto $\gamma_1 = \begin{cases} x = 0 \\ y \in [0,1] \end{cases}$, $\gamma_2 = \begin{cases} x \in [0,1] \\ y = -x+1 \end{cases}$ $\gamma_3 = \begin{cases} x \in [0,1] \\ y = 0 \end{cases}$

$$-\int_\gamma \frac{1}{2}\frac{y^2}{1+x^2}dx = \int_{\gamma_1} \frac{1}{2}\frac{y^2}{1+x^2}dx + \int_{\gamma_2} \frac{1}{2}\frac{y^2}{1+x^2}dx - \int_{\gamma_3} \frac{1}{2}\frac{y^2}{1+x^2}dx =$$

$$\int_{\gamma_2} \frac{1}{2}\frac{y^2}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{1}{2}\frac{(-x+1)^2}{1+x^2}dx$$

infatti $\int_{\gamma_1} \frac{1}{2}\frac{y^2}{1+x^2}dx = \int_{\gamma_3} \frac{1}{2}\frac{y^2}{1+x^2}dx = 0$.