**Corso di laurea in Chimica. AA 2014-2015**
**Istituzioni di Matematica II.**
**Primo esonero**

**1.** Si risolva l'equazione

$$z^2 + |z|^2 + \overline{z}^2 = 2(Re\, z)^2$$

Si scrivano le soluzioni in forma algebrica e le si rappresentino nel piano di Gauss..
Si trovino modulo e argomento delle soluzioni e le si scriva in forma di Eulero.

**Soluzioni.** Posto $z = x + iy$

$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy \qquad \overline{z}^2 = x^2 - y^2 - i2xy \qquad |z|^2 = x^2 + y^2 \qquad Re\, z = x$$

Sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$x^2 - y^2 = 0$$

Le soluzioni sono quindi tutti i numeri delle forma

$$x + ix; \qquad x - ix$$

$x \in \mathbb{R}$. Questi numeri hanno modulo

$$\rho = \sqrt{2}|x|$$

e argomento

$$\pm\frac{\pi}{4} \quad \text{oppure} \quad \pm\frac{3\pi}{4}$$

La loro forma di Eulero é

$$e^r e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{oppure} \quad e^r e^{-i\frac{\pi}{4}} \quad \text{oppure} \quad e^r e^{i\frac{3\pi}{4}} \quad \text{oppure} \quad e^r e^{-i\frac{3\pi}{4}}$$

dover $r = \log(\sqrt{2}|x|)$.

**2.** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

i) se ne trovino gli autovalori e i relativi autovettori;

ii) si dica se é diagonalizzabile;

iii) si dica se il sistema

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y - z = 2 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

ammette soluzioni e, in caso affermativo, quante soluzioni ammette (non é richiesto di risolvere il sistema).

**Soluzioni.** i) Gli autovalori sono le soluzioni dell'equazione

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$|A - \lambda I| = \mathrm{Det} \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^3$$

La matrice ha un solo autovalore $\lambda = 1$.

Gli autovettori sono le soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -y = 0 \\ x - z = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$$

L'autospazio é $< (1, 0, 1) >$.

ii) La dimensione dell'autospazio associato all'autovalore $\lambda = 1$ é 1. La molteplicitá algebrica di $\lambda = 1$ é 3. Quindi la matrice $A$ non é diagonalizzabile.

iii) La matrice $A$ é la matrice dei coefficienti del sistema dato. $|A| \neq 0$ ( si puó fare a meno di calcolare il determinante osservando che $\lambda = 0$ non é autovalore) e quindi, per il teorema di Cramer, il sistema ammette eattamente una soluzione.

**3.** Si risolva l'equazione differenziale

$$y'' - 4y' + 4y = xe^{2x}$$

Si dica se l'equazione ammette soluzioni limitate.

**Soluzioni.** L'integrale generale dell' equazione omogenea associata

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

é

$$y_0(x) = (c_1 + c_2 x)e^{2x}$$

Infatti il polinomio caratteristico

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4$$

ha radice $\lambda = 2$, di molteplicitá $=2$.

Utilizzando il metodo di somiglianza, si cerca un integrale particolare della non omogenea della forma

$$\overline{y}(x) = x^2(ax + b)e^{2x} = (ax^3 + bx^2)e^{2x}$$

Sostituendo questa funzione e le sue derivate

$$\overline{y}'(x) = (2ax^3 + (3ax^3 + 2b)x^2 + 2bx)e^{2x}.$$

$$\overline{y}''(x) = (4ax^3 + (12a + 4b)x^2 + (6a + 8b)x + 2b)e^{2x}$$

nell'equazione, si ottiene

$$(4a - 8a + 4a)x^3 + (12a + 4b - 12a - 8b + 4b)x^2 + (6a + 8b)x + 2b = x$$

da cui segua $a = \frac{1}{6}$ e $b = 0$.

L'integrale generale dell'equazione data é

$$y(x) = (c_1 + c_2 x + \frac{1}{6}x^3)e^{2x}$$

Per ogni valore di $c_1$ e $c_2$,

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = +\infty$$

e quindi l'equazione non ammette soluzioni limitate.