Istituzioni di Matematica II
Soluzioni del primo esonero
21 maggio 2014

1. Si risolva la seguente equazione nel campo complesso e si disegnino le soluzioni nel piano di Gauss.

$$z^2 + |z|^2 + 2z + \overline{z} + 1 = 0$$

Soluzione.

Primo metodo.

$$z^2 + |z|^2 + 2z + \overline{z} + 1 = z^2 + z\overline{z} + 2z + \overline{z} + 1 =$$

$$(z+1)^2 + \overline{z}(z+1) = (z+1)(z+1+\overline{z}) = (z+1)(2\mathrm{Re}z + 1)$$

$(z+1)(2\mathrm{Re}z+1) = 0$ se $z = -1$ oppure $\mathrm{Re}z = -\frac{1}{2}$.

Le soluzioni sono quindi $z = 1$ e $z = -\frac{1}{2} + iy$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Secondo metodo.

Ponendo $z = x + iy$

$$z^2 + |z|^2 + 2z + \overline{z} + 1 = (x^2 - y^2 + i2xy) + (x^2 + y^2) + (2x + i2y) + (x - iy) + 1 =$$

$$(2x^2 + 3x + 1) + i(2xy + y) = (2x^2 + 3x + 1) + iy(2x + 1)$$

$(2x^2 + 3x + 1) + iy(2x + 1) = 0$ se

$$\begin{cases} 2x^2 + 3x + 1 = 0 \\ y(2x+1) = 0 \end{cases}$$

La prima equazione ha soluzioni $x = \frac{-3 \pm \sqrt{(9-8)}}{2} = -1, -\frac{1}{2}$, e quindi, pensata come equazione nelle due variabili x e y, ha come soluzioni le coppie $(-1, y)$ e $(-\frac{1}{2}, y)$.

La seconda equazione ha soluzioni $y = 0$ e $x = -\frac{1}{2}$, e quindi, pensata come equazione nelle due variabili x e y, ha come soluzioni le coppie $(x, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, y)$.

Il sistema ha per soluzioni le coppie $(-1, 0)$ e $(-\frac{1}{2}, y)$.

Le soluzioni dell'equazione sono quindi $z = 1$ e $z = -\frac{1}{2} + iy$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

2. i) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} + \cos x$$

ii) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} + \cos x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Soluzione.

i)

Integrale generale dell'equazione omogenea.

$$y'' + 4y' + 5y = 0$$

Il polinomio caratteristico

$$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$$

ha soluzioni $\lambda = -2 \pm \sqrt{4-5} = -2 \pm i$.

L'integrale generale dell'equazione omogenea é

$$y_0(x) = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$$

Un integrale particolare dell'equazione non omogenea cercato utilizzando il metodo di somiglianza.

$$\begin{aligned} \overline{y}(x) &= ae^{-2x} + b\cos x + c\sin x \\ \overline{y'}(x) &= -2ae^{-2x} - b\sin x + c\cos x \\ \overline{y''}(x) &= 4ae^{-2x} - b\cos x - c\sin x \end{aligned}$$

Sostituendo nell'equazione, si ottiene

$$(4 - 4 + 5)ae^{-2x} + (-b + 4c + 5b)\cos x + (-c - 4b + 5c)\sin x = e^{-2x} + \cos x$$

e qundi

$$\begin{cases} a = 1 \\ 4(c + b) = 1 \\ 8(c - b) = 0 \end{cases}$$

$a = 1, b = c = \frac{1}{8}$

L'integrale generale dell'equazione data é

$$y(x) = e^{-2x}(c_1 \cos x + c_2 \sin x) + e^{-2x} + \frac{1}{8}(\cos x + \sin x)$$

ii)

$$y'(x) = e^{-2x}(-2c_1 \cos x - 2c_2 \sin x - c_1 \sin x + c_2 \cos x) - 2e^{-2x} + \frac{1}{8}(-\sin x + \cos x)$$

$$\begin{cases} y(0) = c_1 + 1 + \frac{1}{8} = 0 \\ y'(0) = -2c_1 + c_2 - 2 + \frac{1}{8} = 0 \end{cases}$$

$c_1 = -\frac{9}{8}$, $c_2 = -\frac{3}{8}$

La soluzione del problema di Cauchy é

$$y(x) = e^{-2x}(-\frac{9}{8}\cos x - \frac{3}{8}\sin x) + e^{-2x} + \frac{1}{8}(\cos x + \sin x)$$

3. i) Si trovino autovalori ed autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ii) Si dica se la matrice A é diagonalizzabile e, in caso affermativo, si trovi una matrice diagonale simile alla matrice A.

iii) Si dica se esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori della matrice A e, in caso affermativo, la si trovi.

Soluzione.

i)

$$\det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\lambda^2 - 1) - (-\lambda) = -\lambda(\lambda^2 - 2)$$

$\det A = 0$ per $\lambda = 0$, $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = 0$ sono le soluzioni nonnulle dell'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

e quindi i vettori della forma $\alpha(1, 0, -1)$ con $\alpha \neq 0$.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = \sqrt{2}$ sono le soluzioni nonnulle dell'equazione

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2}x + y = 0 \\ x - \sqrt{2}y + z = 0 \\ y - \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

e quindi i vettori della forma $\alpha(1, \sqrt{2}, 1)$ con $\alpha \neq 0$.

Gli autovettori relativi all'autovalore $\lambda = -\sqrt{2}$ sono le soluzioni nonnulle dell'equazione

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y = 0 \\ x + \sqrt{2}y + z = 0 \\ y + \sqrt{2}z = 0 \end{cases}$$

e quindi i vettori della forma $\alpha(1, -\sqrt{2}, 1)$ con $\alpha \neq 0$.

ii) La matrice A ha tre autovalori reali distinti e perció é diagonalizzabile. (Si puó anche osservare che la matrice é simmetrica e perció diagonalizzabile).

Le matrici dagonali simili alla matrice A hanno sulla diagonale gli autovalori. Una matrice diagonale simile ad A é

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

iii) La matrice A é simmetrica, perció autovettori relativi ad autovalori diversi, oltre ad essere linearmente indipendenti, sono, ortogonali. Esiste quindi una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori di A.

$$\{v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1),\ v_2 = \frac{1}{2}(1, \sqrt{2}, 1),\ v_3 = \frac{1}{2}(1, -\sqrt{2}, 1)\}$$

é una base ortonormale.