**Corso di laurea in Chimica. AA 2012-2013**
**Istituzioni di Matematica II.**
**Primo esonero**

# Soluzioni

**Esercizio 1.** i) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 8y' + 16y = e^{-4x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

ii) Si dica se la soluzione ammette punti di estremo locale e se ne abbozzi il grafico nell' intervallo $[0, +\infty[$.

**Soluzione.** L'equazione omogenea associata

$$y'' + 8y' + 16y = 0$$

ha integrale generale

$$y_o(x) = (c_1 + c_2 x)e^{-4x}.$$

Infatti l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 8\lambda + 16 = 0$$

ha radice doppia $\lambda = -4$.

Utilizziamo il metodo di somiglianza per trovare una soluzione della non omogenea. Dal momento che $ce^{-4x}$ e $cxe^{-4x}$ sono soluzioni dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione della forma

$$\overline{y}(x) = cx^2 e^{-4x}$$

Sostituendo nell'equazione completa $\overline{y}(x)$ con le sue derivate

$$\overline{y}'(x) = c(2x - 4x^2)e^{-4x}$$

$$\overline{y}''(x) = c(2 - 16x + 16x^2)e^{-4x}$$

otteniamo

$$c(2 - 16x + 16x^2)e^{-4x} + 8c(2x - 4x^2)e^{-4x} + 16cx^2 e^{-4x} = e^{-4x}$$

$$ce^{-4x}(2-16x+16x^2+16x-32x^2+16x^2)=e^{-4x}$$
$$ce^{-4x}2=e^{-4x}$$
$$c=\frac{1}{2}$$

L'integrale generale della non omogenea é

$$y(x)=\frac{1}{2}x^2e^{-4x}+(c_1+c_2x)e^{-4x}$$

che ha derivata

$$y'(x)=(x-2x^2+c_2-4c_1-4c_2x)e^{-4x}$$

Imponendo le condizioni iniziali

$$\begin{cases} y(0)=c_1=1 \\ y'(0)=c_2-4c_1=-5 \end{cases}$$

otteniamo $c_1=1$ e $c_2=-1$.

La soluzione del problema di Cauchy é

$$y(x)=(\frac{1}{2}x^2-x+1)e^{-4x}.$$

$$\lim_{x\to+\infty} y(x)=0$$

$$y'(x)=(-2x^2+5x-5)e^{-4x}$$

che é sempre negativa perché il discriminante del polinomio $P(x)=-2x^2+5x-5$ é $\Delta=25-40<0$.

La soluzione é perció decrescente.

**Esercizio 2.** i) Si calcolino autovalori ed autovettori della matrice

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ii) Si dica se $\mathbb{R}^3$ ha una base fatta di autovettori di $A$.

**Soluzione.** Gli autovalori della matrice $A$ sono soluzioni dell'equazione $|A-\lambda I|=0$.

$$|A-\lambda I|=\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 3 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{pmatrix}=(2-\lambda)^2(1-\lambda)=0$$

ha soluzioni $\lambda=2$ e $\lambda=1$.

Gli autovettori associati all'atovalore $\lambda = 2$ sono le soluzioni nonnulle del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

che ha come soluzioni $\{(0,0,z) : z \in \mathbb{R}\} =< (0,0,1) >$ . Gli autovettori associati all'atovalore $\lambda = 1$ sono le soluzioni nonnulle del sistema omogeneo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3x = 0 \\ x = z \end{cases}$$

che ha come soluzioni $\{(0,y,0) : y \in \mathbb{R}\} =< (0,1,0) >$ .

Tutte le terne costituite da autovettori hanno al massimo due vettorti linearmente indipendenti e perció non possono essere una base di $\mathbb{R}^3$.

**Esercizio 3.** Si risolva l'equazione nel campo complesso

$$\overline{z}^2 + z^2 + |z|^2 + \overline{z} - 4 = i\overline{z}$$

e si scrivano le soluzioni in forma algebrica, trigonometrica e di Eulero.

**Soluzione.** Posto $z = x + iy$, l'equazione diventa

$$(x^2 - y^2 - 2ixy) + (x^2 - y^2 + 2ixy) + (x^2 + y^2) + (x - iy) - 4 = i(x - iy)$$

$$3x^2 - y^2 + x - 4 - iy = y + ix$$

$$(3x^2 - y^2 + x - y - 4) - i(x + y) = 0.$$

Dalla seconda segue $-y = x$ che, sostituito nella prima, da

$$2x^2 + 2x - 4 = 0$$

Questa equazione ha soluzioni $x = -2, 1$.

Le soluzioni dell'equazione nel campo complesso sono, in forma algebrica, trigonometrica e di Eulero:

$z_1 = 1 - i = \sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})) = \sqrt{2}\, e^{-i\frac{\pi}{4}}$

e

$z_2 = -2 + 2i = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{3\pi}{4}) + i\sin(\frac{3\pi}{4})) = 2\sqrt{2}\, e^{i\frac{3\pi}{4}}$.