Istitruzioni di Matematica II

primo esonero
23 aprile 2012

1. a) Si risolva l'equazione

$$z^2 + |z|^2 - i(2z - \overline{z}) = 2.$$

b) Si scrivano le soluzioni in forma algebrica, trigonometrica e di Eulero.

Soluzione

a) Posto $z = x + iy$ l'equazione diventa

$$x^2 - y^2 + i2xy + x^2 + y^2 - ix + 3y = 2$$

Uguagliando parti reali e coefficienti dell'immaginario si ottiene il sistema

$$\begin{cases} 2x^2 + 3y = 2 \\ x(2y-1) = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni della seconda equazione sono $x = 0$ e $y = \frac{1}{2}$.

Sostituendo nella prima equazione $x = 0$ si ottiene $y = \frac{2}{3}$.

Sostituendo nella prima equazione $y = \frac{1}{2}$ si ottiene $a = \pm\frac{1}{2}$.

Ci sono quindi tre soluzioni, di forma algebrica

$$i\frac{2}{3}; \qquad \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}; \qquad -\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$$

b) Le soluzioni hanno rispettivamente modulo e argomento

$$\rho = \frac{2}{3}, \theta = \frac{\pi}{2}; \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{\pi}{4}; \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}, \theta = \frac{3}{4}\pi$$

e forma di Eulero

$$\rho = \frac{2}{3}e^{i\frac{\pi}{2}}; \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}, e^{i\frac{\pi}{4}}; \qquad \rho = \frac{1}{\sqrt{2}}, e^{i\frac{3}{4}\pi}.$$

2. Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

a$_1$) Si risolva il sistema

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

b$_1$) Sia $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione rappresentata dalla matrice A una volta si sia fissata in $\mathbb{R}^3$ la base canonica $\{i, j, k\}$. Si trovino la dimensione e una base per l'immagine e per il nucleo di L.

a$_2$) Si trovino autovalori e autovettori della matrice A.

b$_2$) Si dimostri che A è diagonalizzabile, si scriva la matrice diagonale associata ad A e si trovi una base di $\mathbb{R}^3$ fissata la quale L sia rappresentata dalla matrice diagonale.

Soluzione

a$_1$)

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x \\ 5y \\ 6y \end{pmatrix}$$

e quindi il sistema (1) diventa

$$\begin{cases} 5x = 0 \\ 5y = 0 \\ 6y = 0 \end{cases}$$

da cui segue $x = 0, \quad y = 0,$ e nessuna condizione su z.

L'insieme delle soluzioni è $\{(0, 0, z) \ \ z \in \mathbb{R}\}$.

b$_1$) L'immagine dell'applicazione L è lo spazio vettoriale generato dai vettori colonna. Ci sono solo due colonne linearmente indipendenti e quindi ImL ha dimensione due e una sua base è $\{(5, 0, 0), \ (0, 5, 6)\}$.

Il nucleo di L è l'insieme delle soluzioni del sistema (1): $\{(0, 0, z) \ \ z \in \mathbb{R}\} =< (0, 0, 1) >$ e quindi ha dimensione uno e base il vettore $(0, 0, 1)$.

a$_2$) Gli autovalori sono le soluzione dell'equazione

$$\det \ (A - \lambda I) = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & 0 \\ 0 & 6 & -\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda)^2 \lambda = 0$$

$$\lambda = 5, \quad \lambda = 0$$

Gli autovettori relativi a $\lambda = 5$ si trovano risolvendo l'equazione

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

da cui segue

$$6y - 5z = 0$$

e quindi $z = \frac{6}{5}y$ e nessuna condizione su x e y.

L'autospazio relativo a $\lambda = 5$ è costituito da tutti i vettori $(x, y, \frac{6}{5}y)$, con $(x, y) \neq (0, 0)$.

Gli autovettori relativi a $\lambda = 0$ si sono trovati risolvendo il sistema 1 e sono quindi i vettori $(0, 0, z)$ con $z \neq 0$.

b$_2$) $\lambda = 5$ è regolare: ha molteplicità algebrica due e anche molteplicità geometrica due, infatti dal suo autospazio si possono estrarre due vettori linearmente indipendenti, per esempio $(1, 0, 0)$, $(0, 1, \frac{6}{5})$.

$\lambda = 0$ è semplice e quindi regolare.

Tutti gli autovalori sono reali e regolari, così che si può costriure una base di $\mathbb{R}^3$ fatta di autovettori per esempio $(1, 0, 0)$, $(0, 1, \frac{6}{5})$, $(0, 0, 1)$. La matrice che rappresenta L rispetto a questa base è la matrice diagonale

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

3. a) Si risolva il seguente problrema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = x + e^{-x} \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

b) Si studi la convessità della soluzione in un intorno del punto $x_0 = 0$.

Soluzione

a) L'integrale generale dell'equazione omogenea associata

$$y'' - y' = 0$$

è

$$y(x) = c_1 + c_2 e^x$$

infatti l'equazione caratterestica $\lambda^2 - \lambda = 0$ ha soluzioni $\lambda = 0$ e $\lambda = 1$.

Per la linearità possiamo trovare un integrale particolare della non omogenea sommando due integrali particolari delle equazioni $y'' - y' = x$ e $y'' - y' = e^{-x}$.

Cerchiamo un integrale di

$$y'' - y' = x$$

Dal momento che $\lambda = 0$ è soluzione dell'equazione caratteristica, questo avrà la forma $\overline{y_1}(x) = x(ax+b)$. Sostituendo questa funzione con le sue derivate nell'equazione troviamo $a = -\frac{1}{2}$ e $b = -1$. L'integrale sarà quindi

$$\overline{y_1}(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x$$

Cerchiamo un integrale di

$$y'' - y' = e^{-x}$$

della forma $\overline{y_2}(x) = ae^{-x}$. Sostituendo questa funzione con le sue derivate nell'equazione troviamo $a = \frac{1}{2}$. L'integrale sarà quindi

$$\overline{y_2}(x) = \frac{1}{2}e^{-x}$$

L'integrale generale dell'equazione è

$$y(x) = c_1 + c_2e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Derivando

$$y'(x) = c_2e^x - x - 1 - \frac{1}{2}e^{-x}.$$

Sostituendo le condizioni iniziali, otteniamo il sistema

$$\begin{cases} c_1 + c_2 + \frac{1}{2} = 0 \\ c_2 - 1 - \frac{1}{2} = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $(c_1 = -3, \;\; c_2 = \frac{5}{2})$.

La soluzione del problema di Cauchy è la funzione

$$y(x) = -3 + \frac{5}{2}e^x - \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}e^{-x}.$$

b) Sostituendo i dati iniziali in $y''(x) = y'(x) + x + e^{-x}$, si ottiene $y''(0) = y'(0) + 1 = 2$. Dal momento che $y''(x)$ è continua, per il torema della permanenza del segno, $y''(x) > 0$ in un intorno di $x_0 = 0$ e quindi in questo intorno $y(x)$ è convessa.