

Primo esonero

**Esercizio 1.** Si dica per quali valori del parametro reale  $k$ , il seguente sistema

$$\begin{cases} kx + 5y + 3z = 0 \\ 5x + y - z = 0 \\ kx + 2y + z = 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni non banali e, per tali valori di  $k$ , si risolva il sistema.

**Esercizio 2.** Si scriva il numero complesso

$$\frac{(1 + \sqrt{3}) + (1 - \sqrt{3})i}{1 + i}$$

in forma algebrica, trigonometrica e di Eulero.

**Esercizio 3.** Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 8y' + 16y = x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

**Esercizio 4.** Dati i vettori

$$(1, 0, 0), (-4, 1, -2), (1, 0, -1)$$

i) si dimostri che sono una base di  $\mathbb{R}^3$ ;

ii) si dimostri che sono autovettori della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

iii) si diagonalizzi la matrice  $A$ .

**Esercizio 5.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \arctan y \log(1 + x^2) \\ y(1) = 1, \end{cases}$$

senza integrare:

i) si dimostri che il problema ammette esattamente una soluzione e si dica quale è il suo dominio,

ii) si dimostri che in un intorno del punto  $x = 1$  la soluzione è crescente e convessa.