Istituzioni di Matematica II Canale A-L
A.A. 2014/2015
Argomenti delle lezioni

Martedí 3 marzo - 2 ore.

• Equazioni. Equazioni differenziali ordinarie: ordine, forma normale, integrale generale.
• Esempi.
1) integrale indefinito;
2) equazioni a variabili separabili, con metodo risolutivo.
• Si sono risolte e si é discusso il dominio delle soluzioni delle seguenti equazioni differenziali:
$y' = x$, $y' = y$, $y' = \frac{1}{x}$, $y' = \sqrt{1-x^2}$, $y' = \sqrt{1-y^2}$,$y' = \frac{x}{y}$, $y' = \frac{1}{x}$ $y' = \frac{y}{x}$, $y' = \frac{x}{y}$.

Mercoledí 4 marzo - 2 ore.

• Osservazioni sulle informazioni che l'equazione fornisce sulla monotonia delle soluzioni.
∘ Esempio $y' = x\sqrt{y}$.
Il segno di $y'(x)$ é uguale al segno di x, e quindi le soluzioni non costanti devono crescere se $x > 0$ e decrescer se $x < 0$.
Risolvendo l'equazione si ottiene

$$2\sqrt{y(x)} = \frac{1}{2}x^2 + c \tag{1}$$

Da cui segue

$$y(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}x^2 + c)^2$$

Queste funzioni sono definite in tutto $\mathbb{R}$. Se $c < 0$, si pensi per semplicitá $c = -1$,

$$y(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}x^2 - 1)^2$$

risulta invece decrescente nell'intervallo $[0, \sqrt{2}]$ e crescente in $[-\sqrt{2}, 0]$. Questo non é possibile, per l'osservazione appena fatta sul segno della derivata.
Da un'osservazione piú accurata, si vede che la (1) chiede $\frac{1}{2}x^2 - 1 \geq 0$ e quindt $|x| \geq \sqrt{2}$ e dice quindi che $y(x) = \frac{1}{4}(\frac{1}{2}x^2 - 1)^2$ soddisfa l'equazione differenziale solo per $|x| \geq \sqrt{2}$.
• Problema di Cauchy per equazioni del primo ordine.
∘Teorema di esistenza,
∘Teorema di esistenza ed unicitá locale
∘Teorema di esistenza ed unicitá globale
per equazioni a variabili separabili. Esempi.
• Esempi di equazioni del secondo ordine riconducibili a equazioni del primo ordine.

$$y'' = f(x)g(y')$$

• Problema di Cauchy per equazioni del secondo ordine.

• Equazioni riconducibili a equazioni a variabili separabili: equazioni omogenee di Manfredi.
Esercizi.

Martedí 10 marzo - 2 ore.
• Equazioni lineari del primo ordine. Il metodo del "fattore integrante" o della "variazione delle costanti".
Esercizi.
Equazioni lineari omogenee.
Osservazione sulla struttura dell'integrale generale delle equazioni lineari.
Equazioni omogenee a coefficienti costanti. Equazione caratteristica.

Mercoledí 11 marzo. Non c' stata lezione.

Lunedí 16 marzo - 1 ora.
• Equazioni riconducibili a equazioni lineari: equazioni di Bernoulli. Esercizi.
• Motivazione per l'introduzione dei numeri complessi.
Il campo dei numeri complessi. I complessi "reali".
Forma algebrica. Uguaglianza di due numeri scritti in forma algebrica.
Esercizi.

Martedí 17 marzo - 2 ore.
• Coniugato con proprietá.
• Modulo, significato geometrico e proprietá.
• I numeri complessi in forma trigonometrica. Uguaglianza di due numeri scritti in forma trigonometrica.
Significato geometrico della moltiplicazione e della divisione.
Esercizi.

Mercoledí 18 marzo - 3 ore.
• Elevamento a potenza intera.
• Estrazione di radice.
• Polinomi nel campo coplesso, algoritmo e teorema di Ruffini, il teorema fondamentale dell'algebra.
∘ I polinomi a coefficienti reali. Proprietá delle radici. Fattorizzazione dei polinomi a coefficienti reali
• Distanza in $\mathbb{C}$, Limiti di successioni di numeri comlessi
Esercizi.

Martedí 24 marzo - 2 ore.
• Serie di potenze in $\mathbb{C}$. Convergenza assoluta, Raggio di convergenza.
La serie esponenziale e le serie trigonometriche. Le formule di Eulero. Forma esponenziale dei numeri complessi.

• Equazioni differenziali lineari del secondo ordine, omogenee a coefficienti costanti. Equazione caratteristica, Integrale generale nel caso di due soluzioni distinte reali o complesse.
Esercizi,

Martedí 24 marzo - Pomeriggio, 2 ore di esercitazioni. Esercizi su equazioni differenziali del primo ordine a variabili separabili, di Manfredi, lineari, di Bernoulli. Esercizi su equazioni nel campo complesso.

Mercoledí 25 marzo - 2 ore.
• Definizione di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Proprietá delle operazioni.
• Esempi:
1) I vettori nel piano e nello spazio.
Ossevazione. Fissato un punto, per ogni vettore esiste un suo rappresentante applicato nel punto.
2) $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$.
Osservazione. Una volta fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane, ogni vettore é rappresentato da un elemento di $\mathbb{R}^2$ e le operazioni dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$ "rappresentano" quelle dello spazio vettoriale dei vettori nel piano.
Lo stesso vale per i vettori nello spazio e $\mathbb{R}^3$.
3) $\mathbb{R}^n$, dove $n \in \mathbb{N}$.
4) $C([a,b])$, $C^1([a,b])$, $C^2([a,b])$, $P(x)$, $P_n(x)$.
• Osservazione sulla differenza tra spazio vettoriale e campo numerico.
◦ $\mathbb{R}$ é un campo numerico e ance uno spazio vettoriale, le operazioni di moltiplicazione tra numeri e moltiplicazione per uno scalare coincidono.
◦ $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$, nel primo c' é la struttura di spazio vettoriale, nel secondo quella di campo numerico.
• Combinazioni lineari, definizioni di: vettori linearmente indipendenti, vettori linearmente dipendenti con definizione equivalente; insieme di generatori, base.
Teorema. *Tutte le basi di uno stesso spazio vettoriale hanno la stessa cardinalitá*
•Definizione di dimensione.
• Esercizi in $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $P(x)$.

Martedí 31 marzo - 2 ore.
• Coordinate di un vettore rispetto ad una base. Basi canoniche in R^n. Esercizi sul cambiamento di base. Sottospazi. Sottospazi generati da n vettori. Esempi ed esercizi.

Martedí 31 marzo - Pomeriggio, 2 ore di esercitazioni. Esercizi.

Mercoledí 1 aprile - 2 ore.
• Applicazioni lineari.
• Esempi :
1) fissato $a \in R$

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$L(x) = ax$$

Osservazioni:

$$L(1) = a, \quad L(x1) = xL(1)$$

2) fissati $a, b \in R$

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$L(x) = (ax, bx)$$

Osservazioni:

$$L(1) = (a, b), \quad L(x1) = xL(1)$$

3) fissati $a, b \in R$

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$L(x, y) = (ax + by)$$

Osservazioni:

$$L(\underline{i}) = a, \quad L(\underline{j}) = b$$
$$L(x, y) = L(x\underline{i} + y\underline{j} = xL(\underline{i}) + yL(\underline{i})$$

4) fissati $a, b, c, d \in R$

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

Osservazioni:

$$L(\underline{i}) = (a, c), \quad L(\underline{j}) = (b, d)$$
$$L(x, y) = L(x\underline{i} + y\underline{j} = xL(\underline{i}) + yL(\underline{i}) = x(a, c) + y(b, d)$$

5)

$$L : C^1(I) \to C(I)$$
$$L(y(x)) = y'(x)$$

6)

$$L : C^2(I) \to C(I)$$
$$L(y(x)) = y''(x)$$

7) fissata $a(x) \in C(I)$

$$L : C^1(I) \to C(I)$$
$$L(y(x)) = y'(x) + a(x)y(x)$$

8) fissate $a(x), b(x) \in C(I)$

$$L : C^2(I) \to C(I)$$
$$L(y(x)) = y''(x) + a(x)y'(x) + b(x)y(x)$$

9)

$$L : C([a, b]) \to \mathbb{R}$$
$$L(f(x)) = \int_a^b f(x)\, dx$$

- Definizione di immagine e nucleo di un'applicazione lineare.

Teorema. *L' immagine* Im L *di un'applicazione lineare*

$$L:\, V \to W$$

é un sottospazio vettoriale di W*;*

Se V *ha dimensione finita e* $\{v_1, ..., v_n\}$ *é una base di* V*, allora l'immagine é il sottospazio generato da* $L(v_1), ..., L(v_n)$*.*

$$\text{Im } L = < L(v_1), ..., L(v_n) >$$

con dimostrazione.

Teorema. *Il nucleo* ker L *di un'applicazione lineare*

$$L:\, V \to W$$

é un sottospazio vettoriale di V*.*
con dimostrazione.

Teorema. *Data l'applicazione lineare*

$$L:\, V \to W$$

se V *ha dimensione finita*

$$\dim \ker L + \dim \text{Im } L = \dim V$$

- Esercizi: si trovino immagine e nucleo delle applicazioni lineari degli esempi **1)-6)**

Mercoledí 8 aprile - 2 ore.

- Equazioni lineari.

Teorema *sulla struttura dell'insieme delle soluzioni*
con dimostrazione.
Esempi

$$ax = b$$

$$(3x + 2y, x - y) = (1, 2)$$

$$(3x + 2y, 6x + 4y) = (1, 2)$$

$$y' = f(x)$$

$$y' + 2xy = x$$

- Applicazione alle equazioni differenziali lineari.

○Problema di Cauchy per equazioni differenziali del secondo ordine.

Teorema *di esistenza globale ed unicitá per le soluzioni del problema di Cauchy per equazioni lineari del secondo ordine.*

○ Teorema *L'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare del secondo ordine, omogenea, é uno spazio vettoriale di dimensione* 2*.*

con dimostrazione.
Esercizio Data l'equazione

$$y - \frac{4}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0$$

i) si dimostri che $y = x^4$ e $y = x$ sono soluzioni;
ii) si risolva;
iii) si trovi quella soluzione che soddisfa le condizioni $y(1) = 1$ e $y'(1) = 0$.

○ Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti, polinomio caratteristico.
○ **Esercizio** Si dimostri che:
i) se $\lambda_1 \neq \lambda_2$ allora $e^{\lambda_1 x}$ e $e^{\lambda_2 x}$ sono linearmente indipendenti;
ii) $e^{ax}\cos x$ e $e^{ax}\sin x$ sono linearmente indipendenti;
iii) $e^{\lambda x}$ e $xe^{\lambda x}$ sono linearmente indipendenti.
Esercizi Si risolvano le seguenti equazioni differenziali

$$y'' - y = 0$$

$$y'' + y' + y = 0$$

$$y'' - 2y' + y = 0$$

Martedí 14 aprile - 2 ore . Equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti non omogenee

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

Metodo di somiglianza per trovare una soluzione nel caso in cui $f(x)$ sia una funzione del tipo:
1)

$$P(x)$$

Casi in cui:
$b \neq 0$,
$b = 0$ $a \neq 0$,
$a = b = 0$;
2)

$$e^{\alpha x},\ P(x)e^{\alpha x}$$

Casi in cui α:
non é radice del polinomio caratteristico $\lambda^2 + a\lambda + b$,
é radice semplice,
é radice doppia;
3)

$$A\cos(Bx),\ A\sin(Bx),\ A\cos(Bx) + C\sin(Bx),\ P_1(x)\cos(Bx) + P_2(x)\sin(Bx)$$

casi in cui $\pm iB$
non sono radici del polinomio caratteristico $\lambda^2 + a\lambda + b$,
sono radici;
e nel caso :
4)

$$e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(Bx) + P_2(x)\sin(Bx)\right),$$

Si osservi che
il caso 1) corrisponde a $\alpha = B = 0$;
il caso 2) corrisponde a $\alpha \neq 0 \;= B = 0$;
il caso 3) corrisponde a $\alpha = 0$ $B \neq 0$.
Proprietá delle equazioni lineari.
Sia L un'applicazione lineare tra due spazi vettorali V e W

$$L : V \to W$$

Siano $b_1, b_2 \in W$. Se $v_1 \in V$ é soluzione di $L(v) = b_1$ e $v_2 \in V$ é soluzione di $L(v) = b_2$, allora
$v_1 + v_2$ é soluzione di $L(v) = b_1 + b_2$
con dimostrazione.
Applicazione di questa proprietá alla soluzione dell'equazione differenziale

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

nel caso in cui

$$f(x) = e^{\alpha x}\left(P_1(x)\cos(Bx) + P_2(x)\sin(Bx)\right) + e^{\beta x}\left(Q_1(x)\cos(Dx) + Q_2(x)\sin(Dx)\right)$$

Cenni alle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti di ordine superiore al secondo.

Si sono risolte le seguenti equazioni differenziali:

$$y'' + 3y' + 2y = 1$$
$$y'' + 3y' + 2y = x$$
$$y'' + 3y' = 1$$
$$y'' + 3y' = x$$
$$y'' = 1$$
$$y'' = x$$

$$y'' + 3y' + 2y = 2e^{x}$$
$$y'' + 3y' + 2y = 2e^{-x}$$
$$y'' - 2y' + y = 2e^{x}$$
$$y'' + 3y' + 2y = xe^{x}$$
$$y'' + 3y' + 2y = xe^{-x}$$
$$y'' - 2y' + y = xe^{x}$$

$$y'' + 3y' + 2y = \cos x$$
$$y'' + y = \cos x$$
$$y'' + 3y' + 2y = 2\cos x + x\sin x$$
$$y'' + y = 2\cos x + x\sin x$$

$$y^{iv} - 1 = xe^{2x}$$

Martedí 14 aprile - Pomeriggio, 2 ore di esercitazioni. Esercizi su equazioni differenziali lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.
Si sono svolti i seguenti esercizi:

1) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' = x + e^x \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$$

2) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + y' + y = 10\cos x \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

3) Si risolva il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 8y' + 16y = e^{-4x} \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -5 \end{cases}$$

Si dica se la soluzione ammette punti di estremo locale.

4) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y'' + 2y' + y = x\sin x$$

5) Si dica se il seguente problema al bordo ammette soluzioni e, in caso affermativo, quante sono

$$\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

6) Si dica se il seguente problema al bordo ammette soluzioni e, in caso affermativo, quante sono

$$\begin{cases} y'' - y = 0 \\ y(0) = y(\pi) = 0 \end{cases}$$

7) Si risolva la seguente equazione differenziale

$$y''' - y'' + y' - y = 0$$

Mercoledí 15 aprile - 2 ore .

Esercizi)

-Si é risolta la seguente equazione differenziale e si sono abbozzati i grafici delle soluzioni

$$y'' + 16y = 0$$

-Si é considerato il caso generale:

$$y'' + \omega^2 y = 0$$

- Si é risolta la seguente equazione differenziale

$$y'' + 2\delta y' + 16y = 0$$

i) nel caso $\delta > 4$.
Per $\delta = 5$ si sono disegnati i grafici delle soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 2\delta y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 2\delta y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y'' + 2\delta y' + 16y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = -20 \end{cases}$$

ii) nel caso $\delta < 4$.
Per $\delta = \sqrt{15}$ si sono disegnati i grafici delle soluzioni;
iii) Si é lasciato per esercizio il caso $\delta = 4$.
- Sié considerato il caso generale

$$y'' + 2\delta y' + 1\omega^2 y = 0$$

-Si é risolto il seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' + 16y = \cos(4t) \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Si é data l'interpretazione dei precedenti esercizi in termini di vibrazioni libere, smorzate, forzate e del fenomeno di risonanza.

Matrici: le operazioni di addizione e moltiplicazione per uno scalare. Dimensione dello spazio vettoriale delle matrici a n righe e m colonne.
Prodotto righe per colonne. Proprietá associativa.
Il prodotto tra matrici nello spazio vettoriale delle matrici quadrate (cioé con lo stesso numero di righe e di colonne) e le sue proprietá. Matrice identitá, matrice inversa.

Martedí 21 aprile - 2 ore di esercizi **Esercizio)** Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

si é trovata la matrice inversa.
Data la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

si é visto che non puó avere matrice inversa.
Teorema di rappresentazione.
Esempi: fissate in ogni spazio le basi canoniche, si scrivano le matrici che rappresentano le seguenti applicazioni lineari:

1) fissato $a \in R$

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$L(x) = ax$$

2) fissati $a, b \in R$

$$L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$

$$L(x) = (ax, bx)$$

3) fissati $a, b \in R$

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$L(x, y) = (ax + by)$$

4) fissati $a, b, c, d \in R$

$$L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

5) Date le matrici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

si scrivano le applicazioni lineari rappresentate da queste matrici, una volta che nello spazio si siano fissate le basi canoniche.

6) Data $L : \mathbb{R}^{\to}\mathbb{R}^2$, si sappia che una volta fissata in $\mathbb{R}^2$ la base canonica, L é rappresentata dalla matrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Si trovi la matrice che rappresenta L se in R^2 é fissata la base $(1,1),(1,-1)$.

Le matrici che rappresentano nel piano una rotazione di angolo α e una dilatazione di coefficiente α

Determinante di una matrice. Proprietá. Teorema di Binet. Condizione necessaria e sufficiente perché una matrice sia invertibile.

Martedí 21 aprile - Pomeriggio, 2 ore di esercitazioni. Esercizi su calcolo di determinanti con l'utilizzo delle proprietá.
Determinante delle matrici diagonali e triangolari.
Si é passati dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$$

a una matrice triangolare superiore con lo stesso determinante.
Sistemi di equazioni con lo stesso numero di equazioni e incognite, interpretazione come equazione matriciale.
Si é risolto il sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 1 \end{cases}$$

interpretandolo come

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e quindi applicando ai due membri la matrice inversa A^{-1}.

Mercoledí 22 aprile - 2 Teorema sulla invertibilitá di una matrice e sulla forma della matrice inversa.
Esercizi: Si dica se la seguenti matrii sono invertibili e, in caso affermativo, si scrivano le matrici inverse.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Significato geometrico di $|A| \neq 0$ e $|A| = 0$, con dimostrazione nel caso di dimensione 2.
Teorema di Cramer, con dimostrazione.
Condizioni necessarie e sufficienti per l'esistenza di soluzioni non banali di sistemi omogenei.
Definizione di autovalore e autovettore. Ricerca degli autovalori.

Esercizi:
1) Si risolva il sistema

$$\begin{cases} x+y-z=2 \\ 3x-y+z=1 \\ x-y-z=3 \end{cases}$$

2) Si dica se le seguenti matrici ammettono autovalori reali

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

Caratteristica di una matrice e significato geometrico.
Esercizi: Si trovi il rango delle seguenti matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 5 & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Sistemi lineari generali, matrice dei coefficienti e matrice ompleta. Teorema di Rouché-Capelli con dimostrazione.
Esercizi:
1) Si dica se i seguenti sistemi ammettono soluzioni e, in caso affermativo, si risolvano

$$\begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+4y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$$

Martedí 28 aprile -2 ore Osservazioni sul teorema di RouchĆapelli: numero delle soluzioni, con dimostrazione.
Il teorema di Rouché Capelli e le soluzioni nonnulle dei sistemi omogenei.
Definizioni e ricerca di aurovalori e autovettori. Autospazio. Molteplicitá algebrica e geometrica di un autovalore.
Definizione di matrice diagonalizzabile.
Teorema sulla diagonalizzabilitá delle matrici simmetriche.

Martedí 28 aprile - Pomeriggio, 2 ore di esercitazioni.
1) Si sono risolti i seguenti sistemi di equazioni lineari:

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x-y-z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-z+t=1 \\ x-y-z+2t=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 4x+2y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y-z=1 \\ 4x+2y-2z=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=0 \\ x+y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+y=1 \\ x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases}$$

2) Si sono cercati gli autovalori e i relativi autovettori delle seguenti matrici.
Si detto quali sono le molteplicitá algebrica e geometrica.
Si é detto se sono o non sono diagonalizzabili, e, in caso affermativo, si sono diagonalizzate.

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\1&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}2&0&0\\3&1&0\\1&0&2\end{pmatrix}$$

Mercoledí 29 aprile -2 ore

• Equazioni differenzilai lineari omogenee: Wronskiano di una base delle soluzioni.
Metodo della variazione delle costanti per trovare una soluzione di una equazione lineare non omogenea del secondo ordine.
Esercizio. Si risolva l'equazione

$$y'' + y = \frac{1}{\cos x}$$

Osservazione: nel caso di una equazione lineare del primo ordine, il metodo della variazione delle costanti é il metodo del fattore integrante.

• Sistemi di equazioni differenziali lineari che descrivono:
- due reazioni consecutive del primo ordine.
- una reazione del primo ordine e la sua inversa.

• Forme quadratiche e loro classificazione. La matrice simmetrica associata alla forma quadratica. Classificazione delle forme quadratiche attraverso lo studio del segno degli autovalori. Si é studiato il segno delle seguenti forme in $\mathbb{R}^2$

$$q(x,y) = x^2 + y^2 \qquad q(x,y) = -x^2 - y^2$$
$$q(x,y) = x^2 \qquad q(x,y) = -x^2$$
$$q(x,y) = x^2 - y^2 \qquad q(x,y) = xy$$

Martedí 5 maggio -2 ore

• Prodotto scalare.

∘ Il prodotto scalare tra vettori nel piano e nello spazio. Proprietá.
Significato geometrico. Parallelismo e ortogonalitá. Lunghezza. I versori. Proiezioni ortogonali.
∘ Il prodotto scalare in R^2 e $\mathbb{R}^3$. Basi ortonormali e il teorema di Pitagora.

∘ Se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ e

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3,$$

allora

$$\alpha_i = (v \cdot v_i), \quad i = 1, 2, 3$$

e

$$||v|| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

∘ **Esercizio**.
i) Si consideri in $\mathbb{R}^2$ il vettore $v = (2, 1)$ e se ne calcoli la lunghezza.
ii) Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^2$

$$\{(1, 0), (1, 1)\}$$

e si esprima $v = (2, 1)$ come combinazione lineare di questi vettori. Se ne calcoli poi la lunghezza.
iii) Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^2$

$$\{(1, 1), (1, -1)\}$$

e si esprima $v = (2, 1)$ come combinazione lineare di questi vettori. Se ne calcoli poi la lunghezza.
iv) Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^2$

$$\{(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})\}$$

e si esprima $v = (2, 1)$ come combinazione lineare di questi vettori. Se ne calcoli poi la lunghezza.

∘ Il prodotto scalare in $\mathbb{R}^n$.

∘ In uno spazio vettoriale V con prodotto scalare

$$\underline{u} \cdot \underline{v}$$

si hanno le nozioni di
- ortogonalitá

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = 0,$$

- lunghezza

$$||\underline{u}|| = \sqrt{\underline{u} \cdot \underline{u}}$$

da questa segue la nozione di
- distanza

$$d(\underline{u}, \underline{v}) = ||\underline{u} - \underline{v}||$$

e quindi di
- limite di successioni

$$\lim_{n \to +\infty} \underline{u}_n = \underline{u} \text{ vuol dire } \lim_{n \to +\infty} ||\underline{u}_n - \underline{u}|| = 0$$

e di
- somma di serie:

$$\underline{u} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i \underline{u}_i \text{ vuol dire } \quad \underline{u} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{u}_i$$

e cioé

$$\lim_{n\to+\infty} ||\underline{u} - \sum_{i=1}^{n} a_i \underline{u}_i|| = 0$$

Se

$$\underline{v}_1, ..., \underline{v}_n$$

é una base di e

$$\underline{v} = \alpha_1 \underline{v_1} + ... + \alpha_n \underline{v}_n$$

allora

$$\alpha_i = (\underline{v} \cdot \underline{v_i}), \quad i = 1, ...n$$

e vale l'analogo del teorema di Pitagora

$$||\underline{v}|| = \sqrt{\alpha_1^2 + ... + \alpha_n^2}$$

○ **Esercizio**. Si dimostri che la successione di punti di $\mathbb{R}^2$ $P_n = (x_n . y_n)$ converge al punto $P = (x, y)$ se e solo se le due successioni di numeri (x_n) e (y_n) convergono rispettivamente a x e y.

○ **Esercizio. La serie di Fourier.**
Si dimostri che nello spazio vettoriale $C([0, 2\pi])$

$$(f \cdot g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\, dx$$

é un prodotto scalare.
Si osservi che per ogni $n, m = 0, 1, 2, ...$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \, \sin mx \, dx = 0$$

per ogni $n \neq m$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \, \cos mx \, dx = 0 \qquad \int_0^{2\pi} \sin nx \, \sin mx \, dx = 0$$

per ogni n

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \, \sin nx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{se } n \neq 0 \\ 0 & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \, \cos nx \, dx = \begin{cases} \pi & \text{se } n \neq 0 \\ 2\pi & \text{se } n = 0 \end{cases}$$

L'insieme

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} : \quad n = 1, ...\}$$

é quindi un insieme ortonormale nello spazio vettoriale $C([0, 2\pi])$ con il prodotto scalare

$$(f \cdot g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx\}$$

Questo insieme é "*quasi*" una base, infatti per ogni funzione $f(x) \in C([0, 2\pi])$, se

$$a_0 = \int_0^{2\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx, \quad a_k = \int_0^{2\pi} f(x)\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}}\,dx, \quad b_k = \int_0^{2\pi} f(x)\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\,dx.$$

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty}(a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx))$$

dove il limite va inteso nel senso

$$\lim_{n\to+\infty} ||f(x) - (a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx))|| = 0$$

cioé

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{2\pi}(f(x)-a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx+b_k \sin kx))(f(x)-a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}}-\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx+b_k \sin kx))\,dx = 0$$

Si ha l'analogo del teorema di Pitagora

$$||f||^2 = \int_0^{2\pi} f(x)f(x)\,dx = a_0^2 + \sum_{i=k}^{+\infty}(a_k^2 + b_k^2)$$

• Prodotto vettoriale, prodotto misto tra vettori nello spazio e in $\mathbb{R}^3$. Significato geometrico di $\det A = 0$ e $\det A \neq 0$ nel caso in cui A sia una mtrice $3X3$

Martedí 5 maggio - Pomeriggio, 2 ore di esercitazioni.

• Equazioni parametriche vettoriali e scalari della retta:
◦ retta per un punto con direzione assegnata.
◦ retta per due punti;
Equazioni cartesiane.
Rette parallele e ortogonali.
• Equazioni del piano:
◦ piano per un punto e ortogonale ad un vettore assegnato;
◦ piano per tre punti;
◦ piano contenente due rette incidenti.
Piani paralleli e ortogonali. In particolare piani paralleli e ortogonali ai piani (x, y), (x, z), (y, z).

Rette parallele e ortogonali ad un piano ed in particolare ai piani (x, y), (x, z), (y, z). Piani paralleli e ortogonali a rette e, in particolare, paralleli e ortogonali agli assi x, y,z. Intersezione tra due piani: applicazione del teorema di Rouché-Capelli. Retta intersezione di due piani non paralleli.

Mercoledí 6 maggio -2 ore

•Funzioni di una variabile reale a valori vettoriali; limiti e continuitá. In perticolare il caso in cui la funzione sia a valori in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.
Teorema Sia $\underline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ e $\underline{l} = (l_1, l_2, l_3)$, allora

$$\lim_{t\to t_0} \underline{r}(t) = \underline{l}$$

se e solo se

$$\begin{cases} \lim_{t\to t_0} x(t) = l_1 \\ \lim_{t\to t_0} y(t) = l_2 \\ \lim_{t\to t_0} s(t) = l_3 \end{cases}$$

Teorema $\underline{r}(t)$ é continua in t_0 se e solo se lo sono le funzioni reali $x(t)$, $y(t)$ e $z(t)$.
Definizioni: curva (o rappresentazione parametrica), sostegno.
Esempi. Si disegnino i sostegni delle seguenti curve
1) Rette $\underline{r} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$
i) applicazioni lineari:

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = -3t \end{cases} \qquad \underline{r}(t) = \begin{cases} x = 2t \\ y = 4t \\ z = -6t \end{cases} \qquad \underline{r}(t) = \begin{cases} x = -t \\ y = -2t \\ z = 3t \end{cases}$$

ii) equazioni parametriche della retta:

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \qquad \underline{r}(t) = \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = -1 - 3t \end{cases} \qquad \underline{r}(t) = \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -1 - 4t \\ z = 2 + 6t \end{cases}$$

2) Circonferenze e semicirconferenze.
$\underline{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$\underline{r} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$\underline{r} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

$\underline{r} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$$

3) Spirale d'Archimede. $\underline{r} : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = t \cos t \\ y = t \sin t \end{cases}$$

4) Astroide. $\underline{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

5) Elica cilindrica. $\underline{r} : [0, +\infty] \to \mathbb{R}^3$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases}$$

• Orientazione.
• Il vettore derivato, le sue componenti e il suo modulo (velocitá e velocitá scalare).
◦ Il versore tangente. Equazione della retta tangente.
Curve semplici, curve chiuse, curve regolari e curve regolari a tratti.
• Integrale di una funzione a valori vettoriali.
• Classi di curve piane:
- le curve in forma cartesiana, espressione del vettore derivato e del suo modulo;
- le curve in forma polare, espressione del vettore derivato e del suo modulo.

Esercizio. Si considerino gli esempi 1)-5)
Si osservi l'orientazione, si scrivano i vettori derivati e il loro modulo. Si scrivano i vettori integrali. Si esprimano, quando possibile, le curve in forma cartesiana, e in forma polare.

Martedí 12 maggio -2 ore **Esercizi.** Date le curve $\underline{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

$\underline{r}:[-1,1]\to\mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t)=\begin{cases}x=t\\ y=\sqrt{1-t^2}\end{cases}$$

si calcolino

$$|\underline{r}'(t)| \quad \text{e} \quad |\underline{r}(t)|'$$

• Regole di derivazione:
- la linearitá dell'operazione di derivazione;
- derivata del prodotto scalare;
- il vettore derivato del prodotto vettoriale;
- derivazione e composizione di funzioni: derivata di $\underline{r}(\phi(\tau))$.

Esercizi.
1) Si osservi che se $|\underline{r}(t)|$ é costante allora, in ogni punto $\underline{r}(t)$ e $\underline{r}'(t)$ sono ortogonali.
2) Si calcolino

$$((\cos t,\sin t)\cdot(t\cos t,t\sin t))'$$

$$((\cos t,\sin t)X(t\cos t,t\sin t))'$$

$$((\cos 2t,\sin 2t))'$$

• Definizione di lunghezza di una curva (del sostegno).

Teorema. Sia γ il sostegno della curva regolare $\underline{r}:[a,b]\to\mathbb{R}$, allora, indicata con $l(\gamma)$ la sua lunghezza

$$l(\gamma)=\int_a^b |\underline{r}'(t)|\,dt$$

Esercizi. Si é calcolata la lunghezza
- dell'arco di spirale di Archimede $\underline{r}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t)=\begin{cases}x=t\cos t\\ y=t\sin t\end{cases}$$

- dell'arco di elica cilindrica. $\underline{r}:[0,2\pi]\to\mathbb{R}^3$

$$\underline{r}(t)=\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\\ z=t\end{cases}$$

- della semicirconferenza $x^2+y^2=1$, $y\geq 0$, usando le tre diverse parametrizzazioni: $\underline{r}:[0,\pi]\to\mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t)=\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$$

$\underline{r} : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

$\underline{r} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$$

Martedí 12 maggio - Pomeriggio, 2 ore di esercitazioni.

Si sono svolti esercizi proposti dagli studenti.

Mercoledí 13 maggio -2 ore

• Parametrizzazioni equivalenti, cambio di orientazione. Cambiamenti di parametrizzazione.

Esercizi. Si sono effettuati i cambiamenti di parametrizzazione

- da $\underline{r} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

a $\underline{r} : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

- da $\underline{r} : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases}$$

a $\underline{r} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$$

Teorema. La lunghezza di un arco di curva non dipende dalla sua parametrizzazione.

Il parametro arco.

Esercizio. Data la semicirconferenza $x^2 + y^2 = 1,\ y \geq 0$, si sono trovate le parametrizzazione mediante il parametro arco, equivalenti rispettivamente

- alla parametrizzazione $\underline{r} : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases}$$

- alla parametrizzazione $\underline{r} : [-1, 1] \to \mathbb{R}^2$

$$\underline{r}(t) = \begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1 - t^2} \end{cases}$$

• Integrale di linea di prima specie. Definizione, calcolo, significato geometrico, proprietá.

Esercizi. Si sono calcolati

$$\int_\gamma f(x, y)\, ds$$

nei due casi

- γ é il segmento congiungente i due punti $(0, 0)$ e $(1, 1)$ e $f(x, y) = x + y$,
- γ é l'arco di parabola di equazione $y = x^2$ con $0 \leq x \leq 1$ e $f(x, y) = x + \sqrt{y}$.

Esercizio per casa. Si calcoli

$$\int_\gamma f(x, y)\, ds$$

dove

$$f(x, y) = xy$$

e γ é la semicirconferenza $x^2 + y^2 = 1$ $y \geq 0$, utilizzando diverse parametrizzazioni.

• Cenni sull'integrale di linea di seconda specie e sulle sue proprietá.

Martedí 19 maggio - 2 ore. Funzioni reali di due variabili reali. Grafico. curve di livello. Esempi:

1)

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

2)

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

3)

$$f(x, y) = \sqrt{(1 - (x^2 + y^2)}$$

Funzione a simmetria radiale e loro curve di livello.

4)

$$f(x, y) = k$$

5)

$$f(x, y) = ax + by$$

6)

$$f(x,y) = ax + by + k$$

)

$$f(x,y) = ax$$

6)

$$f(x,y) = by$$

7)

$$f(x,y) = x^2$$

8)

$$f(x,y) = y^2$$

Funzioni costanti rispetto ad una delle due variabili e loro corve di livello.
9)

$$f(x,y) = x^2 - y^2$$

10)

$$f(x,y) = xy$$

.
• Limiti. Teoremi sui limiti.
Esercizio. Si calcoli

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$$

Esercizio. Si verifichi che non esiste

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$$

• Continuitá. Continuitá delle funzioni costanti rispetto ad una delle due variabili e continue come funzioni di una sola variabile. Algebra delle funzioni continue.

Martedí 19 maggio - Pomeriggio, 2 ore di esercitazioni.

Mercoledí 20 maggio -2 ore Primo esonero.

Martedí 26 maggio - 2 ore. • Topologia in $\mathbb{R}^2$:
- punti interni ad un insieme, punti esterni e di frontiera.

- Intorno di un punto.
- Frontiera di un insieme.
- Insieme aperto ed insieme chiuso. Interno e chiusura di un insieme.
- Intersezione ed unione di aperti. Intersezione ed unione di chiusi.

Controesempi:

1) Non é detto che l'intersezione numerabile di aperti sia aperta:

$$\bigcap_{n\geq 1}\{(x,y):\, x^2+y^2<\frac{1}{n}\}=\{0\}$$

2) Non é detto che l'iunione numerabile di chiusti sia chiusa:

$$\bigcup_{n\geq 1}\{(x,y):\, x^2+y^2\leq 1-\frac{1}{n}\}=\{(x,y):\, x^2+y^2<1$$

Insiemi aperti ed insiemi chiusi definiti da funzioni continue.
Esercizio. Dato l'insieme

$$\{(x,y); x^2+y^2\leq 1;\, x>0,\, y>0\}$$

Se ne trovi la frontiera, l'interno e la chiusura.
Insiemi limitati.
Insiemi connessi per archi ed insiemi semplicemente connessi.

- Teorema di Weierstrass.
- Teorema di esistenza degli zeri.

Utilizzo del teorema di esistenza degli zeri nello studio del segno di una funzione.
Esercizio. Si studi il segno delle forme quadratiche

$$q(x,y)=x^2-y^2 \qquad q(x,y)=xy$$

Mercoledí 27 maggio -2 ore

- Derivate parziali, gradiente, derivate direzionali.
- Piano tangente, differenziale.
- Teorema: Condizioni sufficienti per la differenziabilitá.
- Teorema, con abbozzo di dimostrazione: Se una funzione é differenziabile in un punto, allora in quel punto
- é continua;
- é derivabile;
- ha derivate direzionali lungo tutte le direzioni e vale la formula del gradiente.

Controesempi:

1)

$$\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

é derivabile in $(0,0)$, ma in questo punto non é né differenziabile né continua.
2)

$$f(x,y)=\sqrt[3]{x^2y}$$

$\nabla f(0,0)=(0,0)$ mentre le derivate direzionali nell'origine non sono tutte nulle.
Non vale quindi la formula del gradiente e la funzione non é differenziabile in $(0,0)$.
Esercizio. Si calcolino il gradiente della funzione

$$f(x,y)=\sin(x^2+xy)$$

nel punto $(1,2)$.
Si dica se f é differenziabile in $(1,2)$.
Si calcoli la derivata in $(1,2)$ lungo la direzione $\underline{v}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ prima usando la definizione e poi, utilizzando la formula del gradiente (si dica perché é possibile usarla).
• Estremi locali ed assoluti.
• Teorema di Fermat.

Mercoledí 3 giugno -2 ore

• Teoremi di esistenza ed unicitá locale e globale per il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$$

e applicazioni al caso delle equazioni a variabili separabili e lineari.
• Regole di calcolo con il gradiente.
Teoremi di derivazione della funzione composta:
Sia $f::\mathbb{R}^{\rightarrow}\mathbb{R}$ differenziabile,
1) Sia $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivabile, allora $g(x,y)=h(f(x,y))$ é differenziabile e

$$\nabla g(x,y)=h'(f(x,y))\nabla f(x,y)$$

2) Sia $\underline{r}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ derivabile, allora $F(t)=f(\underline{r}(t))$é derivabile e

$$F'(t)=\nabla f(\underline{r}(t))\cdot\underline{r}'(t).$$

Applicazioni del secondo teorema.
- derivate direzionali;
- ricerca dei punti di massimo e minimo di una funzione $f(x,y)$ ristretta al sostegno di una curva regolare, limitata.

Esercizio. Si dica se la segunte funzione

$$f(x,y)=(x-y)^2$$

ristretta al sostegno γ della curva

$$\underline{r}(t)=\begin{cases} x=\cos t \\ y=\sin t \\ t\in[0,2\pi] \end{cases}$$

ammette massimo e minimo assoluto e, in caso affermativo, si calcolino il massimo e il minimo e si dica in quali punti sono assunti.
Soluzione. La funzione

$$f(x, y)$$

é continua, il sostegno della curva data é limitato e chiuso, infatti é il luogo dei punti

$$(x, y) : x^2 + y^2 = 1,$$

quindi per il teorema di Weierstrasse esistono maxf_γ e minf_γ.
Il massimo e il minimo sono assunti nei punti $\underline{r}(t) = (x(t), y(t)) \in \gamma$ tali che

$$\nabla f(\underline{r}(t)) \cdot \underline{r}'(t) = 0$$

$\nabla f(x, y) = 2(x - y)(1, -1)$
$\nabla f(\underline{r}(t))) = 2(\cos t - \sin t)(1, -1)$
$\underline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$\nabla f(\underline{r}(t) \cdot \underline{r}'(t) = 2(\cos t - \sin t)(-\sin t - \cos t)$$

$2(\cos t - \sin t)(-\sin t - \cos t) = 0$ se $t = \frac{\pi}{4}, \frac{3}{4\pi}, \frac{5}{4}\pi, \frac{7}{4}\pi, .$
A questi valori del parametro corrispondono rispettivamente i punti del sostegno $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,$(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$, $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$, $(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$. in cui la funzione assume rispettivamente i valori
$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}) = f(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 0$
$f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = f(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}) = 2.$
Concludendo max$f_\gamma = 2$ e min$f_\gamma = 0$.

Allo stesso risultato si giunge studiando la funzione

$$F(t) = f(\underline{r}(t)) = (\cos t - \sin t)^2$$

in $[0, 2\pi]$.

Martedí 9 giugno -2 ore

• Le funzioni a simmetria radiale.
Grafico e curve di livello delle funzioni a simmetria radiale.
Gradiente della funzione modulo.
Applicazione del primo teorema della funzione composta: gradiente delle funzioni a simmetria radiale.
Esempi.
• Applicazione del secondo teorema della funzione composta: ortogonalitá del gradiente di una funzione alle sue curve di livello.
• Significato geometrico del gradiente,
• Massimi e minimi di una funzione ristretta ad una curva di livello di un'altra funzione. Metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Esercizi.
1) Si dica se la funzione
$$f(x,y)=x^2-y^2$$
ristretta all'insieme delle soluzioni dell'equazione
$$x^2+y^2=1$$
ammette massimo e minimo, e, in caso affermativo, si calcolino.
Si risolva l'esercizio utilizzando prima il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Poi si risolva di nuovo trovando una rappresentazione parametrica del vincole e, infine si traccino le curve di livello della funzione $f(x,y)$ e si osservi il loro comportamento rispetto al vincolo.
2) Si cerchino gli eventuali punti di massimo e minimo della funzione
$$f(x,y)=x^2+y^2$$
ristretta all'insieme delle soluzioni dell'equazione
$$x^2-y^2=1$$

Si risolva l'esercizio utilizzando prima il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Poi si risolva di nuovo trovando una rappresentazione parametrica del vincole e, infine si traccino le curve di livello della funzione $f(x,y)$ e si osservi il loro comportamento rispetto al vincolo.
• Derivate successive, Teorema di Schwarz. Matrice hessiana e differenziale secondo. Formula di Taylor di ordine 2 con il resto di Peano. Classificazione dei punti critici. nel caso in cui il differenziale secondo sia definito o indefinito.

• Funzioni di piú variabili reali a valori vettoriali (o campi vettoriali)
$$\underline{F}: D\subseteq \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
$$\underline{F}: D\subseteq \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$
• L'operatore gradienta manda una funzione
$$U: D\subseteq \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$$
nella funzione
$$\underline{\nabla F}: D\subseteq \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$
e una funzione
$$U: D\subseteq \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$$
nella funzione
$$\underline{\nabla F}: D\subseteq \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

○ Definizione di campo conservativo e di potenziale.

• Definizione di rotore di $\underline{F}$, dove
$$\underline{F}: D\subseteq \mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$$

○ L'operatore rotore manda una funzione

$$\underline{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

nella funzione

$$\underline{\text{rot } F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

○ Definizione di campo irrotazionale.
○ Nel caso in cui si abbia

$$\underline{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

$\underline{F}(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$, si puó pensare come

$$\underline{F} : DX\mathbb{R} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$\underline{F}(x, y, z) = (f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), 0)$, con $f_1(x, y, z)$ e $f_2(x, y, z)$ costanti rispetto a z. In questo caso il rotore ha la direzione dell'asse z e quindi é ortogonale al piano (x, y).

• Applicazione del teorema di Schwarz:
Teorema(con dimostrazione) Sia

$$\underline{F} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

oppure

$$\underline{F} : D \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

continuo con le sue derivate.
Condizione necessaria perché $\underline{F}$ sia conservativo é che $\underline{F}$ sia irrotazionale.

Martedí 9 giugno pomeriggio -2 ore Esercizi.

Mercoledí 10 giugno -2 ore
• Osservazione sulla classificazione dei punti critici nel caso in cui il differenziale secondo sia semidefinito.
Esercizio) Si trovino e si classifichino i punti critici della funzione

$$f(x, y) = e^{-(x^2+y^2)}x^2y$$

• Osservazioni sulle "curve di livello" delle funzioni differenziabili. Condizioni sufficienti percé siano effettivamente curve regolari: il teorema di Dini.
Esercizi
1) Si dimostri che l'equazione

$$x^2 + y^2 = 1$$

- definisce implicitamente una funzione della sola x in un intorno del punto $(0, 1)$.
- definisce implicitamente una funzione della sola y in un intorno del punto $(1, 0)$.
2) Si dimostri che l'equazione

$$x^2 - y^2 = -1$$

- definisce implicitamente una funzione della sola x in un intorno del punto $(0,1)$.
Si dimostri che l'equazione

$$x^2 - y^2 = 1$$

- definisce implicitamente una funzione della sola y in un intorno del punto $(1,0)$.
3) Si dimostri che le equazione

$$x^2 + y^2 = 0$$

e

$$x^2 - y^2 = 0$$

- non definiscono implicitamente una funzione di una sola variabile in un intorno del punto $(0,0)$.

• Condizione sufficiente affinché un campo sia conservativo (senza dimostrazione).
• Un campo irrotazionale é localmente conservativo .
Esempio di un campo irrotazionale ma non conservativo

$$\underline{F}(x,y) = (\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2})$$

Esempio di un campo conservativo in un insieme non semplicemente connesso,

$$\underline{F}(x,y) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2})$$

• Definizione di integrale di linea di seconda specie o lavoro. Sua rappresentazione come integrale di linea di prima specie, sue proprietá, in particolare cambiamento di segno se si cambia l'orientazione della curva, con dimostrazione.
Esercizi
1) Si calcoli

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

nel caso in cui

$$\underline{F}(x,y) = (4x^3 + xy^2, x)$$

e γ sia il sostegno di

$$\underline{r}(t) \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos t \\ y(t) = \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

orientato nel verso delle t crescenti.
2) Si calcoli

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

nel caso in cui

$$\underline{F}(x,y) = (y,x)$$

e γ sia il sostegno di

$$\underline{r}(t)\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos t \\ y(t) = \sin t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

orientato nel verso delle t crescenti.

• **Teorema** Il lavoro di un campo conservativo lungo una curva γ é uguale alla differenza dei valori che un potenziale assume sugli estremi della curva.
Corollario 1. Il lavoro di un campo conservativo lungo una curva chiusa é nullo.
Corollario 2. Il lavoro di un campo conservativo non dipende dalla curva, ma solo dai suoi estremi.
Vale anche il viceversa e quindi
Teorema Un campo é conservativo se e solo se, comunque si fissino due punti e una curva orientata che congiunge i due punti ed é tutta contenuta nel dominio del campo, il lavoro del campo non dipende dalla corva, ma solo dai suoi estremi.
Equivalentemente
Teorema Un campo é conservativo se e solo se il lavoro lungo ogni curva chiusa é nullo.
Osservazioni:
- Si osservi che il campo dell'esercizio 2) é conservativo.

Mercoledí 16 giugno -3 ore

Come si svolgono gli esercizi in cui é richiesto di calcolare

$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

1) **si vede se il campo é irrotazionale**:
• se non lo é si calcola il lavoro usando la definizione;
• se lo é, allora il campo é sicuramente almeno localmente conservativo, perció
2) **si vede se il suo dominio é semplicemente connesso**:
○ Se il dominio é semplicemente connesso, allora il campo é conservativo e quindi
i) se ne trova un potenziale e si calcola la differenza tra i valori che questo assume sugli estremi della curva;
oppure
ii) si calcola il lavoro lungo un'altra curva, con gli stessi estremi. Ovviamente la nuova curva va scelta in modo che il lavoro lungo questa curva sia "facile" da calcolare;
oppure
iii) ovviamente anche nel caso di un campo conservativo, il lavoro puó essere calcolato usando la definizione, ma spesso non conviene, perché i conti sono estremamente complicati.
iv) se la curva é chiusa non serve fare conti: il lavoro é nullo.
○ Se il dominio non é semplicemente connesso, o non é connesso o ha qualche "buco", e allora :
i) si calcola il lavoro usando la definizione;

oppure,
ii) dal momento che il campo é localmente conservativo, si vede se possibile trovare un sottoinsieme semplicemente connesso che contiene la curva
- se la curva non é chiusa é possibile, e quindi:
* si cerca un potenziale con dominio questo insieme semplicemente connesso che contiene la curva e si calcola la differenza tra i valori che il potenziale assume negli estremi della curva,
oppure
* si cerca un'altra curva, con gli stessi estremi, tale che l'unione delle due curve sia una curva chiusa che é il bordo di un sottoinsieme del dominio di $\underline{F}$, cioé che non contiene "buchi" del dominio, e si calcola il lavoro lungo questa curva.
- se la curva é chiusa, si vede:
se é il bordo di un insieme contenuto nel dominio del campo (cioé se la curva non "circonda" buchi del dominio. In questo caso il lavoro é nullo,
* se invece "circonda" buchi del dominio, si usa la definizione per calcolare il lavoro lungo la curva data o lungo un'altra curva che "circondi" il buco, orientata nello stesso verso (orario o antiorario). Infatti, usando la formula di Gauss-Green nel piano, dimostreremo il seguente teorema:
Teorema Se $\underline{F}$ é irrotazionale, e il suo dominio non é semplicemente connesso perché ha un "buco"- Se γ_1 e γ_2 sono due curve chiuse che "circondano il buco", allora

$$\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_2} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

Esercizio Si calcoli

$$\int_{\gamma} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$

nel caso in cui

$$\underline{F}(x, y) = (y, x)$$

e γ sia il sostegno di

$$\underline{r}(t) \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}\cos t \\ y(t) = \sin t \\ t \in [0, \frac{\pi}{4}] \end{cases}$$

orientato nel verso delle t crescenti.
Il campo é irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ che é semplicemente connesso, e quindi il campo é conservativo.
i) I potenziali del campo sono

$$U(x, y) = xy + k$$

Gli estremi della curva sono $(\frac{1}{2},0)$ e $(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$.

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}0 = \frac{1}{4}$$

iii) Si puó integrare lungo $\gamma_1 \bigcup \gamma_2$ dove

γ_1 é il segmento che congiunge $(\frac{1}{2},0)$ e $(0,0)$ e quindi é il sostegno di

$$\underline{r}_1(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 0 \\ t \in [0,\frac{1}{2}] \end{cases}$$

orientato nel verso delle t decrescenti, che ha vettore derivato

$$\underline{r'}_1(t) = \begin{cases} x(t) = 1 \\ y(t) = 0 \end{cases}$$

e γ_2 é il segmento che congiunge $(0,0)$ e $(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$ e quindi il sostegno di

$$\underline{r}_2(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}t \\ y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}t \\ t \in [0,1] \end{cases}$$

orientato nel verso delle t crescenti, che ha vettore derivato

$$\underline{r'}_2(t) = \begin{cases} x(t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ y(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r} = \int_{\gamma_1} \underline{F}\cdot d\underline{r} + \int_{\gamma_2} \underline{F}\cdot d\underline{r} =$$

$$\int_1^0 (0,t)\cdot(1,0)\,dt + \int_0^1 (\frac{1}{\sqrt{2}}t, \frac{1}{2\sqrt{2}}t)\cdot(\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})\,dt = 0 + \int_0^1 \frac{1}{2}t\,dt = \frac{1}{4}t^2|_0^1 = \frac{1}{4}$$

Esercizio Si calcoli

$$\int_\gamma \underline{F}\cdot d\underline{r}$$

nel caso in cui

$$\underline{F}(x,y) = (\frac{e^x}{\sqrt{1+y^2}},0)$$

e γ é il bordo dell'insieme

$$D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\, \sinh x \le y \le \sinh 1\}$$

orientato in verso antiorario. (Curva chiusa ma campo non irrotazionale, si deve usare la definizione)
Esercizio Si calcoli
$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$$
nel caso in cui
$$\underline{F}(x, y) = (y(y - 2x), x(2y - x) + y)$$
e γ é il grafico della funzione $y = \sqrt{x + 1} - \frac{x}{3}$, con $x \in [0, 3]$ (Campo conservativo, perché irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ che é semplicemente connesso). Si osservi che il calcolo dei differenziali é relativamente semplice, mentre é molto facile calcolare
$$\int_{\gamma_1} \underline{F} \cdot d\underline{r}$$
dove γ_1 é il sostegno di
$$\underline{r_1}_2(t) = \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = 1 \\ t \in [0, 3] \end{cases}$$
orientata nel verso delle t crescenti. Questa curva ha gli stessi estremi di γ.
L'uso della definizione comporta i conti piú complicati.
Esercizio Si calcoli
$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$$
nel caso in cui
$$\underline{F}(x, y) = (\sqrt{\frac{4 - y}{4 + x}}, -\sqrt{\frac{4 + x}{4 - y}})$$
e γ é il sostegno della curva
$$\underline{r_1}_2(t) = \begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \\ t \in [0, \pi] \end{cases}$$
orientata nel verso delle t crescenti. (Campo irrotazionale con dominio non semplicemente connesso perché non connesso in quanto é l' unione disgiunta di due componenti semplicemente connesse. γ é peró contenuta in una delle due componenti semplicemente connesse del dominio e quindi si puó lavorare in questa componente dove il campo é conservativo).
Esercizio Si calcoli
$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$$
nel caso in cui
$$\underline{F}(x, y) = (\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2})$$
e γ é la curva definita in forma implicita da
$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1$$

orientata in verso antiorario (Campo irrotazionale con dominio $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ che é connesso, ma con un "buco". γ é la circonferenza di centro $(2,2)$ e raggio 1, che non circonda il "buco". Il lavoro é nullo).

Esercizio Si calcoli
$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$$
nel caso in cui
$$\underline{F}(x,y) = (\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2})$$
e γ é la curva definita in forma implicita da
$$x^2 + y^2 = 1$$
orientata in verso antiorario.(Campo irrotazionale con dominio $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ che é connesso, ma con un "buco". γ é la circonferenza di centro $(0,0)$ e raggio 1, che circonda il "buco". Il lavoro si deve calcolare usando la definizione).

Esercizio Si calcoli
$$\int_\gamma \underline{F} \cdot d\underline{r}$$
nel caso in cui
$$\underline{F}(x,y) = (\frac{y}{x^2+y^2}, -\frac{x}{x^2+y^2})$$
e γ é la curva di equazione
$$\underline{r}'(t) = \begin{cases} x(t) = \sin^3 t \\ y(t) = \cos^3 t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$
orientata in verso delle t crescenti. (Campo irrotazionale con dominio $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ che é connesso, ma con un "buco". γ é una curva chiusa che circonda il "buco". Il lavoro si puó calcolare usando la definizione, ma anche usando la definizione per calcolare il lavoro lungo un'altra curva chiusa che circondi il "buco", per esempio la circonferenza considerata nell'esercizio precedente).

Venerdí 19 giugno -2 ore

• Definizione di integrale doppio
$$\int\int_D f(x,y)\, dxdy$$
nel caso in cui f sia continua e D sia un rettangolo.

∘ Significato geometrico dell'integrale doppio nel caso in cui $f(x,y) \geq 0$.

∘ Calcolo degli integrali doppi in un rettangolo: metodo di integrazione per riduzione.

∘ Caso delle funzioni
$$f(x,y) = h(x)g(y)$$

Esercizio Si calcoli
$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy$$
nel caso in cui
$$f(x,y) = xy$$
e
$$D = [1,2]X[3,4]$$

Esercizio Si calcoli
$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy$$
nel caso in cui
$$f(x,y) = xe^{xy}$$
e
$$D = [1,2]X[3,4]$$
Si osservi che in questo caso, conviene integrare prima rispetto a y e poi rispetto a x.
• Definizione di integrale doppio
$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy$$
nel caso in cui f sia continua e D sia un insieme generale: considerazioni sulla necessitá che il bordo di D non sia "troppo irregolare".
∘ Significato geometrico dell'integrale doppio nel caso in cui $f(x,y) \geq 0$.
∘ Domini y-semplici e x-semplici e regolari.
∘ Calcolo degli integrali doppi: metodo di integrazione per riduzione nei domini y-semplici e x-semplici e regolari.
Esercizio Si calcoli
$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy$$
nel caso in cui
$$f(x,y) = xy$$
e
$$D = \{(x,y) : 0 \leq x \leq 1,\, x^2 \leq y \leq x\}$$
Si svolga l'esercizio considerando prima y-semplice e poi x-semplice.

Esercizio Si calcoli
$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy$$
nel caso in cui
$$f(x,y) = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$$
e
$$D = \{(x,y) : -1 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\}$$

Si osservi il significato geometrico dell'integrale da calcolare.

• Ancora sulle funzioni di piú variabili reali a valori vettoriali: le trasformazioni nel piano.
○ caso delle trsformazioni lineari: matrice che rappresenta la trasformazione é la matrice delle derivate.
○ caso delle trsformazioni non lineari: approssimazion
i del primo ordine e matrice Jacobiane. Significato del determinante della matrice Jacobiana.
○ passaggio a coordinate polari.

• Metodo di cambiamento di variabili nel calcolo degli integrali doppi.
Si usi questo metodo per risolvere l'ultimo esercizio e si confronti il risultato con il significato geometrico dell'integrale doppio.

• Integrali doppi generalizzati di funzioni $f(x, y)$ positive.
Esercizio Integrale della Gaussiana, con dimostrazione.