CORSO DI ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE
PROF. A. TESEI – A.A. 2013-14
PROGRAMMA CONSUNTIVO

1. Integrazione

Famiglie di insiemi, σ-algebre; insiemi di Borel. Spazi misurabili. Misure positive: definizione e proprietà. Spazi di misura. Misure finite e σ-finite. Misure esterne. Famiglie di ricoprimenti numerabili. Costruzione e restrizione di misure esterne. Insiemi μ^*–misurabili. Estensione di Carathéodory.

Misura di Lebesgue in $\mathbb{R}^n$. Confronto con la misura di Peano-Jordan. Invarianza per traslazioni. Misurabilità secondo Lebesgue degli insiemi di Borel. Misura di Lebesgue-Stieltjes. Misure di Radon.

Funzioni misurabili: definizione e proprietà. Funzioni semplici. Approssimazione di funzioni misurabili con funzioni semplici.

Integrale di Lebesgue di funzioni misurabili positive. Disuguaglianza di Tchebichev. Teoremi di passaggio al limite sotto il segno di integrale: teorema di Beppo Levi, lemma di Fatou. Integrazione per serie. Assoluta continuità dell'integrale. Misure di densità. Misure assolutamente continue, misure singolari.

Funzioni integrabili. Integrale di Lebesgue di funzioni integrabili: definizione e proprietà. Teorema di convergenza dominata. Integrazione per serie. Integrali dipendenti da parametri, risultati di continuità e derivabilità. Integrale di funzioni complesse.

Insiemi di misura nulla. Spazi di misura completi. Funzioni definite quasi ovunque. Funzioni essenzialmente limitate. Spazi L^1 e L^∞.

Misure con segno; variazione positiva, negativa e totale. Integrazione rispetto a misure con segno.

2. Spazi di Lebesgue, dualità e compattezza

Definizione degli spazi L^p. Disuguaglianze di Jensen e di Young, di Hölder e di Minkowski.

Spazi vettoriali normati, spazi di Banach. Completezza degli spazi L^p. Densità in $L^p(\mathbb{R}^n)$ di funzioni continue.

Convergenza quasi ovunque e in misura. Convergenza forte e convergenza debole; convergenza debole*. Relazione fra diversi tipi di convergenza.

Operatori e funzionali limitati. Spazio duale; spazi riflessivi. Dualità degli spazi L^p ($p \in (1, \infty)$). Teorema di Riesz. Uniforme convessità. Lo spazio L^∞ come duale di L^1.

Funzioni continue a supporto compatto. Funzionali positivi; decomposizione di Jordan di funzionali localmente limitati. Le misure di Radon come duale di $C_c(\Omega)$. Teorema di Riesz-Markov.

Spazi euclidei, disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Spazi di Hilbert. Uniforme convessità degli spazi di Hilbert. Teorema di Riesz-Fischer.

Teorema di Ascoli-Arzelà. Immersione compatta di spazi $C^k(\overline{\Omega})$. Spazi di Hölder. Compattezza debole in spazi riflessivi, teorema di Banach-Alaoglu (senza dimostrazione).

3. Integrazione in spazi prodotto

Definizione di spazi di misura prodotto. Teorema di Tonelli. Teorema di Fubini. Convoluzione: definizione e proprietà. Regolarizzazione di funzioni L^p, mollificatori.

Trasformata di Fourier di funzioni L^1. Trasformata di Fourier della convoluzione. Inversione della trasformata di Fourier. Trasformata di Fourier di funzioni L^2; teorema di Plancherel. Applicazione allo studio del problema di Cauchy per l'equazione del calore.

4. Distribuzioni e spazi di Sobolev

Funzioni test, convergenza in $C_c^\infty(\Omega)$. Distribuzioni; esempi e prime proprietà. Convoluzione; moltiplicazione per funzioni C^∞. Funzioni localmente sommabili. Derivate deboli. Spazi $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ e $W^{1,p}(\Omega)$. Le misure come distribuzioni positive (senza dimostrazione).

Definizione e completezza degli spazi $H^1(\Omega)$ e $H^1_0(\Omega)$. Spazio $H^{-1}(\Omega)$, spazio duale di $W^{1,p}(\Omega)$.

Disuguaglianze di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg e di Morrey. Immersione continua di spazi $W^{m,p}(\Omega)$. Teorema di Fréchet-Kolmogorov (senza dimostrazione). Immersione compatta di $H^1_0(\Omega)$ in $L^2(\Omega)$, teorema di Rellich-Kondrachev (senza dimostrazione).

TESTI CONSIGLIATI

M. Chipot: *Elliptic Equations: An Introductory Course* (Birkhäuser, 2000).
E. DiBenedetto: *Real Analysis* (Birkhäuser, 2002).
L. C. Evans: *Partial Differential Equations* (AMS, 1998).
E. H. Lieb - M. Loss: *Analysis* (AMS, 2000).
A. Tesei: *Istituzioni di Analisi Superiore* (Bollati Boringhieri, 1997).