Laurea Triennale in Matematica
Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2013/2014
Prova Scritta 18 Luglio 2014
Soluzione degli esercizi proposti

1. Sia $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un processo di Poisson.

a) Determinare il valore atteso del numero di arrivi entro il tempo $t = 2$, condizionatamente all'informazione

$$(N_1 = 0, N_4 = 5)\,.$$

con intensità μ tale che $P(N_1 = 0) = \frac{1}{4}$.

b) Calcolare $P(N_2 = 1, N_4 = 5)$ assumendo che l'intensità μ del processo sia tale che $P(N_1 = 0) = \frac{1}{4}$

Soluzione

a) Indicando con μ l'intensità del processo, si ha, per $k = 0, ..., 5$,

$$P(N_2 = k|N_1 = 0, N_4 = 5) =$$

$$\frac{P(N_1 = 0, N_2 = k, N_4 = 5)}{P(N_1 = 0, N_4 = 5)} =$$

$$\frac{5!\exp\{-\mu\}\exp\{-\mu\}\mu^k\exp\{-2\mu\}\,(2\mu)^{5-k}}{k!(5-k)!\exp\{-\mu\}\exp\{-3\mu\}\,(3\mu)^5} =$$

$$= \binom{5}{k}\frac{\mu^k\,(2\mu)^{5-k}}{(3\mu)^5} = \binom{5}{k}\frac{\mu^k}{(3\mu)^k}\frac{(2\mu)^{5-k}}{(3\mu)^{5-k}} = \binom{5}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{5-k}.$$

Ne segue

$$\mathbb{E}\left(N_2|N_1 = 0, N_4 = 5\right) = \frac{5}{3}.$$

b) La condizione $P(N_1 = 0) = \frac{1}{4}$ si traduce in $\exp\{-\mu\} = \frac{1}{4}$ e dunque

$$\mu = \log 4.$$

Possiamo concludere

$$P(N_2 = 1, N_4 = 5) = \exp\{-2\mu\}2\mu\exp\{-2\mu\}\frac{(2\mu)^4}{4!} =$$

$$= \frac{\exp\{-4\log 4\}\,(2\log 4)^5}{4!} = 2.6667\times 10^{-2}.$$

2. Una catena di Markov $\{X_n\}_{n=0,1}$ sullo spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ ha matrice di transizione P individuata dalle seguenti condizioni:

$$p_{11} = \frac{5}{12}, p_{22} = \frac{5}{6}, p_{12} = p_{21}, p_{31} = p_{33}, p_{23} = p_{32} = 0$$

a) Determinare se tale matrice è regolare

b) Determinare la distribuzione invariante, giustificandone esistenza ed unicità

c) Determinare

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_{n+1} = X_n\}.$$

Soluzione

a) La matrice è regolare in quanto risulta, come si vede immediatamente, che tutti gli elementi di P^2 sono positivi.

b) La distribuzione invariante è data da

$$\pi_1 = \frac{6}{17}, \pi_2 = \frac{6}{17}\ , \pi_3 = \frac{5}{17}$$

c)

$$\lim_{n\to\infty} P\{X_{n+1} = X_n\} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(P\{X_{n+1} = X_n | X_n = 1\} P\left(X_n = 1\right) + P\{X_{n+1} = X_n | X_n = 2\} P\left(X_n = 2\right) + P\{X_{n+1} = X_n | X_n = 3\} P\left(X\right.\right.$$

$$p_{11} \lim_{n\to\infty} P\left(X_n = 1\right) + p_{22} \lim_{n\to\infty} P\left(X_n = 2\right) + p_{33} \lim_{n\to\infty} P\left(X_n = 3\right) =$$

$$\frac{1}{12 \times 17}\left(5 \times 6 + 10 \times 6 + 6 \times 5\right) = \frac{10}{17}.$$

3. Sia $X_1, X_2, ...$ una successione di variabili aleatorie indipendenti, tutte con distribuzione esponenziale. Si supponga che esse non siano identicamente distribuite, bensì valga

$$\mathbb{E}\left(X_k\right) = \frac{1}{k}, k = 1, 2, ...$$

a) Calcolare

$$\mathbb{P}\left(X_1 < X_2\right).$$

b) Dimostrare che

$$\mathbb{P}\{\min_{1\le k\le n} X_k = X_1\} = \frac{2}{n\left(n+1\right)}.$$

c) Si ponga ora $n = 100$. In termini del teorema centrale del limite, calcolare il valore approssimato per la probabilità

$$\mathbb{P}\{-0.9 \le \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} kX_k \le 1.1\}.$$

Soluzione

a) Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti con distribuzioni esponenziali, rispettivamente di parametri μ_X e μ_Y.

$$\mathbb{P}\left(X < Y\right) = \int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} f_{X,Y}(x,y)dxdy = \int_0^{+\infty} f_X(x)\left[\int_x^{+\infty} f_X(y)dy\right]dx =$$

$$\int_0^{+\infty} \mu_X \exp\{-x \cdot \mu_X\} \left[\exp\{-x \cdot \mu_Y\}\right] dx = \frac{\mu_X}{\mu_X + \mu_Y}.$$

Per le nostre due variabili X_1, X_2, di parametri $\mu_{X_1} = 1$ e $\mu_{X_2} = 2$ rispettivamente, abbiamo allora

$$\mathbb{P}\left(X_1 < X_2\right) = \frac{1}{3}.$$

b) Consideriamo ora n variabili aleatorie indipendenti $Y_1, ..., Y_n$, con distribuzioni esponenziali rispettivamente $\mu_1, ..., \mu_n$.

Dimostriamo che risulta

$$\mathbb{P}\{\min_{1 \leq k \leq n} Y_k = Y_1\} = \frac{\mu_1}{\sum_{k=1}^n \mu_k}.$$

Osserviamo, a tale proposito, che la variabile aleatoria $\min_{2 \leq k \leq n} Y_k$ segue una distribuzione esponenziale con parametro dato da

$$\sum_{k=2}^n \mu_k$$

e che essa è stocasticamente indipendente da Y_1. In base a quanto mostrato nel precedente punto a), si ha dunque

$$\mathbb{P}\{\min_{1 \leq k \leq n} Y_k = Y_1\} = \mathbb{P}\{\min\left(Y_1, \min_{2 \leq k \leq n} Y_k\right) = Y_1\} = \frac{\mu_1}{\mu_1 + \sum_{k=2}^n \mu_k} = \frac{\mu_1}{\sum_{k=1}^n \mu_k}.$$

Osservando che le variabili $X_1, X_2, ...$ sono esponenziali indipendenti con parametri uguali a $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2, ...$ rispettivamente, possiamo concludere,

$$\mathbb{P}\{\min_{1 \leq k \leq n} X_k = X_1\} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n k} = \frac{2}{n\,(n+1)}.$$

c) Per $t > 0$,

$$\mathbb{P}(kX_k > t) = \mathbb{P}(X_k > \frac{t}{k}) = \exp\{-k\frac{t}{k}\} = \exp\{-t\}.$$

Dunque le variabili aleatorie $X_1, 2X_2, 3X_3, ...$ sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite, con distribuzione esponenziale standard (cioè di parametro $\lambda = 1$). Esse hanno tutte valore atteso uguale ad 1 e varianza uguale a 1. La media aritmetica $\frac{1}{100}\sum_{k=1}^n kX_k$ ha valore atteso uguale ad 1 e varianza uguale ad $\frac{1}{100}$. In virtù del TCL possiamo concludere, indicando al solito con Z una variabile aleatoria fittizia distribuita secondo una gaussiani standard,

$$\mathbb{P}\{-0.9 \leq \frac{1}{100}\sum_{k=1}^{100} kX_k \leq 1.1\} = \mathbb{P}\{-0.9 \leq \frac{1}{\sqrt{100}} Z + 1 \leq 1.1\} \cong$$

$$\mathbb{P}\{-1.9 \cdot 10 \leq Z \leq 0. \cdot 10\} = \Phi\left(1\right) - \Phi(-19) \cong \Phi\left(1\right) \cong 0.8413.$$