

Laurea Triennale in Matematica
Corso di Probabilità 2
A.A. 2013/2014 secondo semestre
Docente: Fabio Spizzichino
Programma del Corso

Parte 1. *Generalità e preliminari*

Richiami sulle nozioni fondamentali di probabilità discreta. Cenni su insiemi di Borél e misura di Lebesgue su \mathbb{R} e \mathbb{R}^n . Additività finita e numerabile. Continuità della probabilità. σ -algebra di sottoinsiemi, misure di probabilità, spazi di probabilità, variabili aleatorie. σ -algebra generata da una famiglia di sottoinsiemi, σ -algebra generata da una variabile aleatoria. Funzione di ripartizione (o di distribuzione) di una variabile aleatoria; proprietà caratterizzanti di una funzione di ripartizione. Significato probabilistico dei punti di discontinuità di una funzione di ripartizione. Funzioni di densità di probabilità sulla retta e primi esempi; costante di normalizzazione. Funzioni di distribuzione nel caso discreto, assolutamente continuo e singolare (funzione di ripartizione continua, senza densità); esempio della funzione di Cantor. Enunciato del teorema di decomposizione di Lebesgue. Distribuzioni di probabilità di trasformazioni monotone di variabili aleatorie. Valore atteso di una variabile aleatoria; caso discreto e caso assolut. continuo. Cenno all'integrale di Stieltjes. Proprietà fondamentali del valore atteso. Varianza e sue proprietà fondamentali.

Parte 2. *Generalità sulle distribuzioni congiunte*

Funzioni di distribuzione e funzioni di densità congiunte per vettori di variabili aleatorie. Funzioni di distribuzione e funzioni di densità marginali. Densità condizionate. Formula di Bayes per densità; costante di normalizzazione. Funzioni di regressione e rette di regressione. Indipendenza stocastica fra variabili aleatorie; caso generale e caso assolut. continuo. Somme di variabili aleatorie e convoluzioni di densità. Covarianza e coefficiente di correlazione. Varianza di una somma di più variabili aleatorie. Cambiamento di densità sotto trasformazioni regolari.

Parte 3. *Modelli univariati notevoli*

Richiami su famiglie notevoli di distribuzioni di probabilità discrete. Famiglie notevoli di distribuzioni di probabilità assolut. continue: *uniformi su intervalli, esponenziali, gamma, chi-quadro, gaussiane, Cauchy, t di Student, Weibull, log-normali, beta, Pareto*. Loro proprietà fondamentali; valori attesi e varianze. Variabili standardizzate. Funzione di rischio. Funzione quantile. Cenno al problema della generazione di numeri casuali.

Parte 4. *Questioni circa vettori di variabili gaussiane*

Trasformazione di Box e Muller e generazione di variabili aleatorie gaussiane. Distribuzioni gaussiane in due dimensioni; loro leggi marginali, condizionate e coefficiente di correlazione. Rette di regressione. Trasformazioni lineari invertibili di leggi gaussiane in due dimensioni. Cenno al caso $n > 2$. Trasformazioni ortogonali e Teorema di Cochran.

Parte 5. *Processi di Poisson e statistiche ordinate*

Processi di Poisson omogenei; distribuzioni marginali e congiunte per gli intertempi e per i tempi di arrivo. Distribuzioni marginali e congiunte per il valore del processo ad un tempo e a più tempi. Distribuzioni uniformi su domini regolari. Statistiche d'ordine dalla legge uniforme, partizioni casuali di intervalli, distribuzioni beta. Distribuzioni condizionate di variabili i.i.d esponenziali data la loro somma.

Parte 6. *Teorema centrale del limite e funzioni caratteristiche.*

Enunciato teorema centrale del limite (Lindbeg-Lévy) per variabili i.i.d. con varianza finita. Applicazioni e approssimazioni gaussiane. Definizione e proprietà fondamentali della funzione caratteristica; funzione caratteristica della somma di variabili indipendenti; funzione caratteristica e momenti della distribuzione. Funzione caratteristica di distribuzioni notevoli (degeneri, binomiali, Poisson, geometriche, gaussiane, esponenziali, esponenziali bilatere). Proprietà di stabilità della famiglia delle distribuzioni gaussiane. Enunciato del teorema di continuità e del teorema di inversione; schema della dimostrazione del teorema centrale.

Parte 7. *Catene di Markov.*

Nozioni fondamentali: spazio degli stati, proprietà di Markov, caso temporalmente omogeneo, matrice delle probabilità di transizione; matrici stocastiche. Matrici delle probabilità di transizione in più passi; equazioni di Chapman-Kolmogorov. Distribuzione iniziale, distribuzione dello stato della catena al passo n . Distribuzione congiunta degli stati della catena in k passi distinti. Stati assorbenti, classi chiuse. Distribuzioni invarianti, distribuzioni reversibili, distribuzioni d'equilibrio. Catene irriducibili e catene regolari. Teorema di Markov-Kakutani, Enunciato del Teorema di Markov per catene regolari, unicità della distribuzione invariante per catene irriducibili.

Testi di riferimento

F. Spizzichino, Appunti su alcuni argomenti di Calcolo delle Probabilità. A.A. 2012/2013. In rete su pagina web docente

M. Piccioni, Dispense del Corso di Calcolo delle Probabilità 2. In rete su pagina web docente

P. Baldi. Calcolo delle Probabilità. McGraw-Hill (2007)

Altri testi di consultazione per approfondimenti e argomenti facoltativi

M. Piccioni. Probabilità di Base, II edizione, Aracne (2011)

G. Koch, La Matematica del Probabile, Aracne (1997)

S. M. Ross, Calcolo delle Probabilità. Apogeo (2004)

G. Dall'Aglio, Introduzione al Calcolo delle Probabilità. Zanichelli (varie edizioni)

P. Billingsley, Probability and Measure. Third edition. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics (1995)

D. Stirzaker, Probability and random variables, Cambridge University Press (1999)

W. Feller, An Introduction to Probability and its Applications, Vol. II, J. Wiley & Sons (1971)

L'esame consiste in una prova scritta ed una prova orale

Per la prova orale, oltre allo studio del programma, si richiede che il candidato prepari l'esposizione specifica di un tema a scelta, fra quelli elencati qui di seguito o su ulteriori argomenti di approfondimento, concordati con il docente.

1. *Teorema di Cochran e intervalli di fiducia*

Trasformazioni ortogonali di vettori di variabili i.i.d. gaussiane. Richiami sulle distribuzioni del chi-quadro e t di Student. Teorema di Cochran. Applicazione del Teorema di Cochran agli intervalli di fiducia.

2. *Proprietà di statistica ordinata dei Processi di Poisson*

Statistiche d'ordine dalla legge uniforme, partizioni casuali di intervalli, distribuzioni beta. Distribuzioni condizionate di variabili i.i.d esponenziali data la loro somma. Proprietà di statistica ordinata.

3. *Teorema di Continuità per le funzioni caratteristiche*

Enunciato e dimostrazione del Teorema di Continuità.

a) Legge dei grandi numeri per variabili i.i.d. senza assunzione del momento secondo finito

b) Approssimazione di Poisson per le distribuzioni binomiali

4. *Teorema di inversione e proprietà di stabilità della distrib. di Cauchy*

Formula di inversione di Fourier. Funzione caratteristiche della distribuzione esponenziale bilatera e della distribuzione di Cauchy; proprietà di stabilità della distrib. di Cauchy e relative conseguenze sul comportamento delle medie aritmetiche

5. *Catene di Markov regolari*

Relazioni fra le proprietà di irriducibilità e di regolarità. Dimostrazione del Teorema di Markov per catene regolari.

a) Algoritmo di Metropolis

b) Teorema ergodico per catene regolari

6. *Teorema di decomposizione di Lebesgue.*

Dimostrazione del teorema. Distribuzione di Cantor.