Laurea Triennale in Matematica,
Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2013/2014
Prova Scritta 27 Giugno 2014
Soluzioni degli esercizi proposti

1. Sia $\{X_n\}_{n=0,1,...}$ una catena di Markov temporalmente omogenea con spazio degli stati $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e matrice di transizione

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

a) Disegnare il grafo di transizione della catena e stabilire se questa è regolare
b) Calcolare la matrice delle probabilità di transizione in due passi
c) Trovare una distribuzione invariante e stabilire se essa sia o meno unica
d) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{(X_{n+1} = 3) \cap (X_{n+3} \leq 2) | X_0 = 4\}$$

e) Calcolare

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n \neq 4\}.$$

Soluzione

a) Dal disegno del grafo di transizione emerge immediatamente che la catena è *irriducibile*. Ed essendo $p_{44} > 0$ possiamo concludere che essa è anche *regolare*. Tale conclusione è comunque confermata dalla soluzione del successivo punto b), che mostra che $P^2 > 0$.

b)

$$\mathbf{P} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

c) Dal punto precedente sappiamo che la distribuzione invariante è unica. Risolvendo il sistema

$$\pi = \pi P$$

$$\sum_{j=1}^{4} \pi_j = 1,$$

si ottiene

$$\pi_1 = \frac{16}{89}, \pi_2 = \frac{22}{89}, \pi_3 = \frac{21}{89}, \pi_4 = \frac{30}{89}.$$

d) Per la proprietà di Markov,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{(X_{n+1}=3)\cap(X_{n+3}\leq 2)|X_0=4\} = \left(p_{31}^{(2)}+p_{32}^{(2)}\right)\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_{n+1}=3|X_0=4\}$$

ed, essendo la catena regolare, possiamo concludere

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_{n+1}=3|X_0=4\}=\pi_3$$

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{(X_{n+1}=3)\cap(X_{n+3}\leq 2)|X_0=4\}=\frac{21}{89}\frac{1}{4}.$$

e)

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{X_n\neq 4\}=\pi_1+\pi_2+\pi_3=\frac{59}{89}.$$

2. X_1, X_2 ed X_3 sono variabili aleatorie gaussiane indipendenti ed identicamene distribuite con valore atteso $\mu=1$ e varianza $\sigma^2=4$. Poniamo

$$Y_1=\frac{X_2+X_3}{2}, Y_2=\frac{X_1+X_3}{2}, Y_3=\frac{X_1+X_2}{2}.$$

a) Calcolare

$$\mathbb{P}\{-2.92\leq Y_1\leq 4.92\}$$

b) Determinare la funzione di densità congiunta della terna (Y_1,Y_2,Y_3)
c) Determinare la funzione di densità congiunta della coppia (Y_1,Y_2)

Soluzione

a) Chiaramente le distribuzioni marginali di Y_1,Y_2,Y_3 sono gaussiane $\mathcal{N}(1,2)$. Dunque, indicando al solito con Z una variabile aleatoria con distribuzione gaussiana standard, possiamo scrivere

$$\mathbb{P}\{-2.92\leq Y_1\leq 4.92\}=\mathbb{P}\{-2.92\leq Z\sqrt{2}+1\leq 4.92\}=$$

$$\mathbb{P}\{-\frac{3.92\sqrt{2}}{2}\leq Z\sqrt{2}\leq\frac{3.92\sqrt{2}}{2}\}=2\Phi\left(\frac{3.92\sqrt{2}}{2}\right)-1=$$

$$2\Phi\left(2.771\,9\right)-1=0.982\,40$$

b) Le variabili aleatorie originarie X_1, X_2 ed X_3 si ottengono dalle nuove variabili Y_1,Y_2,Y_3 attraverso la trasformazione

$$X_1=Y_2+Y_3-Y_1$$

$$X_2=Y_1+Y_3-Y_2$$

$$X_3=Y_1+Y_2-Y_3,$$

il cui determinane Jacobiano ha modulo uguale a 4. Possiamo quindi scrivere

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,y_3) =$$

$$4f_{X_1,X_2,X_3}(y_2+y_3-y_1, y_1+y_3-y_2, y_1+y_2-y_3) =$$

$$\frac{1}{2\pi^{\frac{3}{2}}}\exp\{-\frac{1}{4}\left[(y_2+y_3-y_1-1)^2+(y_1+y_3-y_2-1)^2+(y_1+y_2-y_3-1)^2\right]\}$$

c) Relativamente alla funzione di densità (bidimensionale) marginale della coppia (Y_1,Y_2), possiamo scrivere per definizione

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1,y_2,t)\,dt.$$

Ne emerge che (Y_1,Y_2) ammette una distribuzione gaussiana bivariata, che possiamo individuare direttamente calcolandone i relativi parametri. A tal proposito, tenendo presente quanto visto nel precedente punto a), basta calcolarne il coefficiente di correlazione $\rho(Y_1,Y_2)$. Risulta

$$Cov(Y_1,Y_2) = \frac{1}{4}Cov(X_2+X_3, X_1+X_3) =$$

$$\frac{1}{4}\left[Cov(X_2,X_1)+Cov(X_3,X_1)+CovX_2,X_3)+Var(X_3)\right] = \frac{1}{2};$$

$$\rho(Y_1,Y_2) = \frac{Cov(Y_1,Y_2)}{\sqrt{Var(X_1)\cdot Var(X_2)}} = \frac{1}{4}.$$

Dunque

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1,y_2) = \frac{1}{\pi\sqrt{15}}\exp\{-\frac{8}{15}\left[\frac{(y_1-1)^2}{2}-\frac{1}{4}(y_1-1)(y_2-1)+\frac{(y_2-1)^2}{2}\right]\}.$$

3. Sia $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un processo di Poisson di intensità $\mu = \frac{1}{4}$ e sia $T_1, T_2, ...$ la successione dei relativi tempi di arrivo.

a) Calcolare

$$\mathbb{P}\{N_4 = 1, N_8 = 3, N_{12} = 6\}$$

b) Calcolare

$$\mathbb{P}\{N_4 = 1, N_8 = 3 | N_{12} = 6\}$$

c) Determinare la funzione di densità condizionata di $2T_1$ data l'osservazione $(T_2 = 6)$

Soluzione

a)

$$\mathbb{P}\{N_4 = 1, N_8 = 3, N_{12} = 6\} =$$
$$\mathbb{P}\{N_4 = 1\}\mathbb{P}\{N_8 = 3|N_4 = 1\}\mathbb{P}\{N_{12} = 6|N_4 = 1, N_4 = 1\} =$$
$$\mathbb{P}\{N_4 = 1\}\mathbb{P}\{N_4 = 2\}\mathbb{P}\{N_4 = 3\} =$$
$$\exp\{-3\}/2!3! = \exp\{-3\}/12.$$

b) Essendo

$$\mathbb{P}\{N_{12} = 6\} = \exp\{-3\}3^6/6!,$$

dal punto precedente si ottiene

$$\mathbb{P}\{N_4 = 1, N_8 = 3|N_{12} = 6\} = \frac{60}{3^6}.$$

c) Sappiamo che

$$X_1 := T_1, X_2 := T_2 - T_1$$

sono variabili indipendenti, identicamente distribuite con distribuzione $\mathcal{E}\,(4)$. Poniamo

$$Y_1 := 2T_1, Y_2 := T_2.$$

Consideriamo la trasformazione

$$X_1 = \frac{1}{2}Y_1, X_2 = Y_2 - \frac{1}{2}Y_1,$$

il cui determinante jacobiano è dato da $J = \frac{1}{2}$ otteniamo, nella regione $0 \leq \frac{1}{2}y_1 \leq y_2$ in cui la densità congiunta f_{Y_1,Y_2} risulta strettamente positiva,

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = \frac{1}{2}f_{X_1,X_2}(\frac{1}{2}y_1, y_2 - \frac{1}{2}y_1) =$$
$$8\exp\{-4(\frac{1}{2}y + y_2 - \frac{1}{2}y_1\} = \frac{1}{32}\exp\{-4y_2\}.$$

D'altra parte sappiamo che $Y_2 = T_2$ segue una distribuzione gamma $G\,(2, 4)$ e quindi la sua funzione di densità marginale è data da

$$f_{Y_2}(y_2) = \frac{4^2}{\Gamma(2)}y_2\exp\{-4y_2\}.$$

Quindi otteniamo, per ogni valore y_2 fissato,

$$f_{Y_1}(y_1|T_2 = y_2) = f_{Y_1}(y_1|Y_2 = y_2) =$$
$$\frac{f_{Y_1,Y_2}(y_1, 6)}{f_{Y_2}(6)} = \frac{1}{2y_2}$$

nella regione $0 \leq y_1 \leq 2y_2$ (e zero altrove). Possiamo concludere che, condizionatamente all'osservazione $(T_2 = 6)$, $2T_1$ segue una distribuzione uniforme nell'intervallo $[0, 12]$.