Laurea Triennale in Matematica,
Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2013/2014
Appello Straordinario - Prova 14 Maggio 2014
Soluzione degli esercizi proposti

1. Sia $\{X_n\}_{n=0,1}$ una catena di Markov sullo spazio degli stati $E = \{1, 2, 3\}$ con matrice di transizione P individuata, per un'opportuna coppia di valori positivi c e d, dalle seguenti condizioni

$$p_{11} = p_{22} = c; p_{33} = d; p_{21} = p_{32} = p_{13} = 0.$$

a) In funzione dei coefficienti c e d, determinare la matrice di transizione in due passi.

b) In funzione dei coefficienti c e d, determinare la distribuzione di probabilità $\pi \equiv (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$, invariante per la catena.

c) Assumendo che la distribuzione iniziale per la catena sia uguale a π, calcolare la probabilità condizionata

$$P\{X_5 = 1, X_9 = 1 | X_7 = 3\}.$$

d) Per $n = 0, 1, ...$, si considerino le variabili aleatorie definite come segue

$$Y_n = A \text{ se } X_n \in \{1, 2\}; \;\; Y_n = B \text{ se } X_n = 3.$$

La successione $Y_0, Y_1, ...$ costituisce una catena di Markov? Motivare la risposta

Soluzione

La matrice P sarà data da

$$\begin{pmatrix} c & (1-c) & 0 \\ 0 & c & (1-c) \\ (1-d) & 0 & d \end{pmatrix}$$

a) La matrice P^2 è allora data da

$$\begin{pmatrix} c^2 & 2c(1-c) & (1-c)^2 \\ (1-c)(1-d) & c^2 & (1-c)(c+d) \\ (1-d)(c+d) & (1-c)(1-d) & d^2 \end{pmatrix}$$

b) La distribuzione invariante π è la soluzione (unica) del sistema di equazioni

$$\begin{gathered} \pi_1 = c\pi_1 + (1-d)\pi_3 \\ \pi_2 = (1-c)\pi_1 + c\pi_2 \\ \pi_3 = (1-c)\pi_2 + d\pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{gathered}$$

e dunque

$$\pi_1 = \pi_2 = \frac{1-d}{3-2d-c}, \pi_3 = \frac{1-c}{3-2d-c}$$

c) In virtù della proprietà di Markov e dell'ipotesi che la distribuzione iniziale per la catena sia uguale a π, si ottiene

$$P\{X_5 = 1, X_7 = 3, X_9 = 1\} = P\{X_0 = 1\}P\{X_2 = 3|X_0 = 1\}P\{X_4 = 1|X_2 = 3\} =$$

$$= \pi_1 p_{13}^{(2)} p_{31}^{(2)} = \frac{(1-c)^2\,(1-d)^2(c+d)}{3-2d-c}$$

$$P\{X_7 = 3\} = \frac{1-c}{3-2d-c}$$

$$P\{X_5 = 1, X_9 = 1|X_7 = 3\} = (1-c)\,(1-d)^2\,(c+d).$$

Allo stesso risultato si può anche arrivare notando che

$$P\{X_5 = 1|X_7 = 3\} = \frac{P\{X_5 = 1, X_7 = 3\}}{P\{X_7 = 3\}} = (1-d)\,(1-c)\,,$$

$$P\{X_9 = 1|X_7 = 3\} = \frac{P\{X_7 = 3, X_9 = 1\}}{P\{X_7 = 3\}} = \frac{(1-d)(c+d)}{3-2d-c}$$

e che, per la stessa proprietà di Markov, deve risultare

$$P\{X_5 = 1, X_9 = 1|X_7 = 3\} = P\{X_5 = 1|X_7 = 3\} \cdot P\{X_9 = 1|X_7 = 3\}.$$

d) La successione $Y_0, Y_1, ...$ **non** costituisce una catena di Markov, in quanto essa non soddisfa la proprietà di Markov. Per rendersene conto basta infatti confrontare, ad esempio, le probabilità condizionate

$$P\{Y_2 = B|Y_0 = A, Y_1 = A\},$$

$$P\{Y_2 = B|Y_0 = B, Y_1 = A\}.$$

Tali probabilità dovrebbero essere uguali fra loro se $Y_0, Y_1, ...$ fosse una catena di Markov. Invece risulta

$$P\{Y_2 = B|Y_0 = A, Y_1 = A\} = \frac{P\{Y_0 = A, Y_1 = A, Y_2 = B\}}{P\{Y_0 = A, Y_1 = A\}} =$$

$$\frac{P\{X_0 = 1, X_1 = 2, X_2 = 3\} + P\{X_0 = 2, X_1 = 2, X_2 = 3\}}{P\{X_0 = 1, X_1 = 2\} + P\{X_0 = 2, X_1 = 2\} + P\{X_0 = 1, X_1 = 1\} + P\{X_0 = 2, X_1 = 1\}} = \frac{1-c}{1+c}.$$

$$P\{Y_2 = B|Y_0 = B, Y_1 = A\} = \frac{P\{Y_0 = B, Y_1 = A, Y_2 = B\}}{P\{Y_0 = B, Y_1 = A\}} =$$

$$\frac{P\{X_0 = 3, X_1 = 1, X_2 = 3\} + P\{X_0 = 3, X_1 = 2, X_2 = 3\}}{P\{Y_0 = B, Y_1 = A\}} = 0.$$

2. X, Y sono due variabile aleatorie con distribuzione gaussiana congiunta $\mathcal{N}\left(0, 0; \sigma^2, \sigma^2; \rho\right)$ e si consideri la variabile aleatoria $S = X + Y$.

a) Calcolare la probabilità $P\{-\sigma \leq S \leq \sigma\}$

b) Per $x \in \mathbb{R}$, studiare al variare di x, l'andamento della probabilità condizionata $P\{-\sigma \leq S \leq \sigma | X = x\}$

c) Per $s \in \mathbb{R}$, studiare al variare di s, l'andamento della probabilità condizionata $P\{-\sigma \leq X \leq \sigma | S = s\}$

Soluzione

a) S è una variabile aleatoria gaussiana, con valore atteso e varianza rispettivamente dati da

$$\mathbb{E}\left(S\right) = 0,$$

$$Var\left(S\right) = 2\sigma^2 + 2\rho\sigma^2 = 2\sigma^2\left(1 + \rho\right).$$

Dunque, indicando al solito con Z una variabile aleatoria gaussiana standard, si può scrivere

$$P\{-\sigma \leq S \leq \sigma\} = P\{-\sigma \leq \sigma Z\sqrt{2\left(1 + \rho\right)} \leq \sigma\} = 2\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\left(1 + \rho\right)}}\right) - 1.$$

b) La coppia (X, S) segue una distribuzione gaussiana bidimensionale, con covarianza e coefficiente di correlazione

$$Cov(X, S) = Var(X) + Cov(X, Y) = \sigma^2\left(1 + \rho\right)$$

$$\rho(X, S) = \frac{\sqrt{2\left(1 + \rho\right)}}{2}.$$

Dunque la distribuzione condizionata di S dato $(X = x)$ è gaussiana, con valore atteso e varianza rispettivamente dati da

$$\mathbb{E}\left(S | X = x\right) = x\frac{\rho(X, S)\sigma_S}{\sigma} = x\left(1 + \rho\right),$$

$$Var\left(S | X = x\right) = Var\left(S\right)\left(1 - \rho^2(X, S)\right) = \sigma^2\left(1 - \rho^2\right).$$

Quindi

$$P\{-\sigma \leq S \leq \sigma | X = x\} = P\{-\sigma \leq x\left(1 + \rho\right) + \sigma Z\sqrt{\left(1 - \rho^2\right)} \leq \sigma\} =$$

$$\Phi\left(\frac{\sigma - x\left(1 + \rho\right)}{\sigma\sqrt{1 - \rho^2}}\right) - \Phi\left(\frac{-\sigma - x\left(1 + \rho\right)}{\sigma\sqrt{1 - \rho^2}}\right).$$

c) Analogamente al punto b), la distribuzione condizionata di X dato $(S = s)$ è gaussiana, con valore atteso e varianza rispettivamente dati da

$$\mathbb{E}\,(X|S = s) = s\frac{\rho(X, S)\sigma}{\sigma_S} = \frac{s}{2},$$

$$Var\,(X|S = s) = \sigma^2 \left(1 - \rho^2(X, S)\right) = \frac{1}{2}\sigma^2(1 - \rho).$$

Dunque possiamo scrivere

$$P\{-\sigma \leq X \leq \sigma|S = s\} =$$

$$P\{-\sigma \leq \frac{s}{2} + \sigma Z\sqrt{\frac{1-\rho}{2}} \leq \sigma\} =$$

$$\Phi\left(\sqrt{2}\frac{\sigma - s/2}{\sigma\sqrt{1-\rho}}\right) - \Phi\left(\sqrt{2}\frac{-\sigma - s/2}{\sigma\sqrt{1-\rho}}\right).$$

3. Siano $V_1, V_2, ...$ variabili aleatorie i.i.d.con distribuzione esponenziale di parametro $\mu = 1/10$, e siano $W_1, W_2, ...$ variabili aleatorie i.i.d.con distribuizione esponenziale di parametro $\nu = 1/5$. Si assume inoltre che le due successioni $V_1, V_2, ...$ e $W_1, W_2, ...$ sono stocasticamente indipendenti. Poniamo

$$X_n = \min(V_n, W_n), n = 1, 2, ...$$

a) Determinare la distribuzione di probabilità di X_1 e di $T_2 = X_1 + X_2$
b) Calcolare la probabilità $P\{X_1 = V_1\}$
c) Ponendo, per $t > 0$,

$$N_t \equiv \sup\{n \in \mathbb{N}| \sum_{k=1}^{n} X_k \leq t\},\ \text{se } X_1 \leq t,$$

$$N_t \equiv 0,\ \text{se } X_1 > t,$$

calcolare la probabilità $P\{N_1 = 0, N_2 = 0, N_4 = 3\}$.

Soluzione
a) Per $x > 0$,

$$P\{X_n > x\} = P\{V_n > x, W_n > x\} = \exp\{-\frac{3}{10}x\}.$$

Dunque X_n segue una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = \frac{3}{10}$ e le variabili $X_1, X_2, ...$sono indipendenti fra loro.

$T_2 = X_1 + X_2$ segue quindi una distribuzione gamma $G\left(2, \frac{3}{10}\right)$. Le funzioni di densità di X_1 e T_2 rispettivamente sono

$$f_{X_1}(x) = \frac{3}{10}\exp\{-\frac{3}{10}\}\mathbf{1}_{\{x>0\}},$$

$$f_{T_2}(t) = \left(\frac{3}{10}\right)^2 t \exp\{-\frac{3}{10}\}\mathbf{1}_{\{t>0\}}.$$

b)

$$P\{X_1 = V_1\} = P\{V_1 \leq W_1\} =$$

$$\int\int_{\{v \leq w\}} f_{V_1,W_1}(v,w)\, dvdw.$$

In virtù dell'indipendenza fra V_1 e W_1, abbiamo

$$\int\int_{\{v \leq w\}} f_{V_1,W_1}(v,w)\, dvdw =$$

$$\int_0^\infty f_{V_1}(v) \left[\int_v^\infty f_{W_1}(w)\, dw\right] dv = \int_0^\infty f_{V_1}(v) \exp\{-\frac{1}{5}v\} dv =$$

$$\frac{1}{10}\int_0^\infty \exp\{-\frac{3}{10}v\} dv = \frac{1}{3}.$$

c) $\{N_t\}_{t \geq 0}$ è un processo di Poisson di parametro $\frac{3}{10}$.

$$P\{N_1 = 0, N_2 = 0, N_4 = 3\} = P\{N_1 = 0\}P\{N_2 = 0|N_1 = 0\}P\{N_4 = 3|N_2 = 0\} =$$

$$\exp\{-\frac{3}{10}\}\exp\{-\frac{3}{10}\}\exp\{-\frac{6}{10}\}\left(\frac{6}{10}\right)^3/6 = \frac{9}{250}\exp\{-\frac{6}{5}\}.$$