

Laurea Triennale in Matematica, Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2013/2014
FOGLIO ESERCIZI N. 4 (Distribuito 10 Aprile 2014)

Argomento: Variabili aleatorie gaussiane

Esercizio 1. Uno strumento di misura è soggetto ad un errore casuale \mathcal{E} , la cui distribuzione è influenzata dal sussistere o meno di una certa situazione ambientale H , durante la misurazione. Più precisamente: al verificarsi di H , \mathcal{E} segue una distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, 1/4)$ e al non verificarsi di H , \mathcal{E} segue una distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, 1/9)$. Si suppone che il verificarsi di H non sia direttamente osservabile e si valuta $P(H) = 0,2$. Si procede ora alla misurazione di una grandezza fisica di valore (noto) $g = 100$ e indichiamo con X il risultato della misurazione (cioè $X = 100 + \mathcal{E}$)

- a) Calcolare la probabilità dell'evento $E = \{99.2 \leq X \leq 100.8\}$
- b) Calcolare la probabilità condizionata $P(H|E)$.

Esercizio 2. X_1, \dots, X_{16} sono variabili aleatorie i.i.d. con distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(2, 4)$.

- a) Calcolare

$$P\{-2 < \frac{\sum_{j=1}^{16} X_j}{16} < 6\}$$

- b) Calcolare

$$P\{-2 < \min_{1 \leq j \leq 16} X_j \leq \max_{1 \leq j \leq 16} X_j < 6\}.$$

Esercizio 3. Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Sia inoltre $A = (a_{i,j})$ una matrice quadrata $n \times n$ invertibile, ortogonale:

$$A^T A = I$$

essendo I la matrice identica $n \times n$. Consideriamo il vettore di variabili aleatorie definito dalla trasformazione $\mathbf{T} = A\mathbf{X}$.

- a) Scrivere la funzione di densità congiunta di \mathbf{X} ;
- b) provare che la densità congiunta di \mathbf{T} coincide con quella di \mathbf{X} .

Esercizio 4. Siano X_1, \dots, X_n variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Provare che $\sum_{j=1}^n X_j$ segue una distribuzione gaussiana, utilizzando il risultato ottenuto nel precedente Esercizio 3.

Esercizio 5. A e B sono variabili aleatorie non negative, stocasticamente indipendenti, tali che $X = \log A$ e $Y = \log B$ sono distribuite secondo una gaussiana standard. Poniamo

$$U = \frac{B}{A}.$$

- a) Calcolare $P\{e^{-1} \leq U \leq e\}$;
- b) Scrivere la funzione di densità di U ;
- c) Calcolare il valore atteso $\mathbb{E}(U)$.

Esercizio 6. X, Y sono due variabili aleatorie con funzione di densità congiunta gaussiana bivariata di parametri:

$$\mu_X = 0, \mu_Y = 1; \sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = 4; \rho = \frac{1}{4}.$$

- a) Determinare la densità congiunta di (X, S) , dove $S = X + Y$;
- b) Determinare la densità marginale di S .

Esercizio 7. Siano X, Y due variabili aleatorie con distribuzioni marginali gaussiane standard, e con distribuzione congiunta gaussiana bidimensionale con coefficiente di correlazione ρ .

- a) Determinare la densità congiunta di (X, V) dove $V = Y - \rho X$;
- b) Calcolare la covarianza $Cov(X, V)$.

Esercizio 8. Siano X ed Y due variabili aleatorie con distribuzioni marginali gaussiane standard, e con distribuzione congiunta gaussiana bidimensionale con coefficiente di correlazione ρ . Si consideri la trasformazione

$$\begin{aligned} V_1 &= a_{11}X + a_{12}Y \\ V_2 &= a_{21}X + a_{22}Y \end{aligned}$$

Quale condizione su ρ garantisce che valga $Cov(X, V) = 0$?

Esercizio 9. X ed Y sono due variabili aleatorie con distribuzione congiunta gaussiana $N(1, 1; 1, 4; -\frac{1}{2})$. Calcolare $P(1 \leq Y \leq 3 | X = 0)$.

Esercizio 10. X ed Y sono due variabili aleatorie con valore atteso nullo e varianze $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{9}$ rispettivamente. La loro distribuzione congiunta è gaussiana con covarianza uguale a $\rho = 0.6$. Calcolare $P\{-1 \leq X - 2Y \leq 1 | 2X + Y = 1\}$.

Esercizio 11. X_1, X_2, X_3, X_4 sono variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione gaussiana $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Poniamo

$$Y = \max_{1 \leq j \leq 4} X_j$$

e indichiamo con la funzione di densità $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ congiunta di X_1, X_2, X_3, X_4 .

- a) Determinare σ^2 imponendo la condizione $P\{Y \leq 4\} = 0.90369$
- b) In corrispondenza a tale valore di σ^2 , indicare la regione in cui è soddisfatta la relazione

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq c$$

essendo $c \in (0, 1)$ una costante assegnata.