Laurea Triennale in Matematica, Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2013/2014
FOGLIO ESERCIZI N. 3 (Assegnato 1 Aprile 2014)

Argomento: Somme di variabili aleatorie, Trasformazioni di densità, Processi di Poisson

Esercizio 1. Consideriamo la variabile aleatoria $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2}$, dove X, Y sono due variabili aleatorie con distribuzione assolutamente continua. Determinare la funzione densità di probabilità di ρ nei seguenti due casi:
a) La distribuzione congiunta di (X, Y) è uniforme sul cerchio unitario;
b) X, Y sono indipendenti, identicamente distribuite secondo una distribuzione gaussiana standard.

Esercizio 2. Siano X ed Y due variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione $R\,(0, 1)$, uniforme nell'intervallo $[0, 1]$. Determinare la distribuzione di probabilità della somma $S = X + Y$.

Esercizio 3. X ed Y sono due variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione esponenziale di parametro λ. Per $s > 0$, e ponendo $S = X + Y$, trovare la distribuzione condizionata di X dato $(S = s)$.

Esercizio 4. X ed Y sono due variabili aleatorie indipendenti ed identicamente distribuite secondo una distribuzione esponenziale di parametro $\lambda = 2$.
a) Trovare la distribuzione di probabilità di $V = 2 \min(X; Y)$;
c) Trovare la distribuzione di probabilità di $Z = \min\,(X, 2Y)$;
c) Trovare la distribuzione di probabilità di $W = X - Y$.

Esercizio 5. $X_{(1)}, ..., X_{(n)}$ sono le statistiche ordinate di n variabili aleatorie $X_1, ..., X_n$ indipendenti e con identica distribuzione uniforme nell'intervallo $[0; 1]$.
a) Trovare la funzione di densità ed il valore atteso di $X_{(k)}$ $(1 \leq k \leq n)$.
b) Quanto vale il valore atteso di $X_{(1)} + ... + X_{(n)}$?

Esercizio 6. X ed Y sono due variabili aleatorie gaussiane indipendenti con valori attesi μ_X, μ_Y e con uguale varianza σ^2. Applicando l'operazione di convoluzione fra le due funzioni di densità, dimostrare che $S = X + Y$ è ancora una variabile aleatoria gaussiana.

Esercizio 7. La distribuzione congiunta delle due variabili aleatorie M e R è tale che
- R segue una distribuzione gamma $G\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$
- La distribuzione condizionata di M dato $(R = r)$ (per $r > 0$) è gaussiana di valore atteso 0 e varianza $\frac{1}{r}$.

a) Determinare la funzione di densità marginale di M
b) Calcolare $P\{-1 \leq M \leq 1\}$.

Esercizio 8. X ed Y sono due variabili aleatorie indipendenti con identica funzione di densità di probabilità $f(x)$ tale che $f(x) = 0$ per $x < 1$. Si ponga

$$U = X - Y; V = \frac{X}{Y}.$$

a) Trovare la funzione di densità congiunta della coppia $(X;, U)$ e la funzione di densità marginale di U.

b) Trovare la funzione di densità congiunta della coppia (X, V) e la funzione di densità marginale di V .

c) Trovare la funzione di densità condizionata $f_X(x|U = u)$ di X dato $(U = u)$, specificando per quali valori di u questa sia definita. Analogamente si faccia per la funzione di densità condizionata $f_X(x|V = v)$ di X dato $(V = v)$. Verificare che in generale risulta

$$f_X(x|U = 0) \neq f_X(x|V = 1).$$

Esercizio 9. Siano T_1, T_2, T_3 i primi tre tempi di arrivo in un processo di Poisson di intensità μ.
a) Determinare la funzione di densità congiunta di (T_1, T_2);
b) Determinare la funzione di densità congiunta di (T_1, T_2, T_3);
c) Determinare la funzione di densità condizionata di T_3 dato $(T_1 = 10)$.

Esercizio 10. Siano T_1, T_2, T_3 i primi tre tempi di arrivo in un processo di Poisson di intensità μ.
a) Calcolare le covarianze $Cov\,(T_1, T_2)\,, Cov\,(T_1, T_2)$;
b) Calcolare i coefficienti di correlazione $\rho\,(T_1, T_2)\,, \rho\,(T_1, T_2)$;
c) Calcolare $P\{T_1 > s|T_2 \leq t < T_3\}$, per $s = 4$ e $t = 8$;
d) Calcolare $P\{N_1 = 0, N_4 = 1, N_8 = 2\}$.

Esercizio 11. Un grande magazzino resta aperto al pubblico 24 ore su 24; l'arrivo dei clienti alla zona casse è scandito da un processo di Poisson di intensità $\mu = 1$ (essendo preso il minuto come unità di tempo). In un giorno prfiessato dalla direzione viene effettuata a sorpresa un'iniziativa promozionale: ad ogni cliente che accede alle casse dalle ore 9 alle ore 12 di quel giorno vengono consegnati due buoni sconto; viene invece consegnato un solo buono sconto ai clienti che accedono alle casse dalle ore 12 fino alle ore 21. Indichiamo con X il numero dei buoni sconto distribuiti entro le ore 12 e con Y il numero dei buoni sconto distribuiti fra le ore 12 e le ore 21.

a) Quanto valgono, rispettivamente, $\mathbb{E}(X)$ e $\mathbb{E}(Y)$?

b) Calcolare la distribuzione condizionata di Y sapendo che è stato uguale a 600 il numero totale dei clienti giunti alle casse fra le ore 9 e le ore 21.

Esercizio 12. Sia $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un processo di Poisson di intensità μ tale che $P\{N_1 = 0\} = p$, essendo $p \in (0, 1)$ una costante assegnata.

a) Determinare, in funzione di p, le probabilità condizionate

$$\alpha\,(p) = P\{N_2 = 0, N_3 = 2 | N_1 = 0\},$$

$$\beta\,(p) = P\{N_2 = 1, N_3 = 2 | N_1 = 0\};$$

b) Studiare, al variare di p, l'andamento del segno della funzione

$$R(p) = \alpha\,(p) - \beta\,(p)\,.$$