Laurea Triennale in Matematica
Università Sapienza
Corso di Probabilità 2, A.A. 2013/2014
FOGLIO ESERCIZI N. 1 (Assegnato 13 Marzo 2014)
Funzioni di distribuzione e di densità unidimensionali

Esercizio 1. Sia $\lambda > 0$ e X una v.a. con distribuzione esponenziale di parametro λ e poniamo

$$P\{1 \leq X \leq 2\} = c.$$

a) Determinare l'intervallo dei valori possibili per c
b) Determinare il valore di λ in funzione di c.

Esercizio 2. X è una v.a. con distribuzione ass. continua; la sua funzione di densità di probabilità è data da

$$f(x) = \begin{cases} a & 0 \leq x \leq 1 \\ bx & 1 < x \leq 2 \\ 0 & altrove \end{cases},$$

essendo a e b costanti positive.
a) Determinare l'intervallo dei valori possibili per b
b) Determinare, per ogni fissato valore di b, il valore di a in funzione di b
c) In corrispondenza a tale valore di b, calcolare

$$P\{\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{3}{2}\}.$$

Esercizio 3. Sia U una variabile aleatoria con distribuzione uniforme $R[0, 1]$. Determinare $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R}$ in modo tale che $X = \varphi(U)$ segua una distribuzione esponenziale di parametro λ.

Esercizio 4. Sia X una variabile aleatoria con distribuzione assolutamente continua e *simmetrica*, cioè tale che

$$P(X \leq x) = P(-X \leq x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Determinare quali condizioni debbono essere soddisfatte dalla funzione dei densità di probabilità f e dalla funzione F^{-1}.

Esercizio 5. Sia U una variabile aleatoria con distribuzione uniforme $R[0, 1]$ e

$$X := tg\left(-\frac{\pi}{2} + \pi U\right).$$

Determinare la funzione di distribuzione e la funzione di densità di probabilità di X.
Si tratta di una distribuzione simmetrica?

Esercizio 6. Consideriamo la funzione

$$F(x) = \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}.$$

a) Verificare che si tratta di una funzione di distribuzione
b) Determinare la funzione F^{-1} e la funzione di densità di probabilità f
c) Si tratta di una distribuzione simmetrica?

Esercizio 7. X è una v.a. non negativa con distribuzione ass. continua e funzione di intensità assegnata $r(x)$. Scrivere la corrispondente funzione di densità di probabilità $f(x)$.

Esercizio 8. X è una v.a. con distribuzione uniforme sull'intervallo $[-2, 2]$. Calcolare la probabilità condizionata

$$P\left(-2 \leq 2X \leq 2 | -\frac{5}{2} \leq 2X \leq \frac{5}{2}\right).$$

Esercizio 9. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = 4x^3 \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Determinare a in modo tale che risulti

$$P\left(X \leq a\right) = P\left(X \geq a\right).$$

Esercizio 10. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = k \exp\{-|x|\}, x \in \mathbb{R}.$$

a) Determinare il valore della costante k
b) Calcolare $P\left(|X| \leq 1\right)$

Esercizio 11. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = 2x \exp\{-x^2\}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(x).$$

Determinare la funzione di densità di probabilità di $Y = X^2$.

Esercizio 12. Un punto viene scelto a caso nell'intervallo $(0, 2)$ e consideriamo le lunghezze dei due intervalli determinati da tale punto. Trovare la distribuzione di probabilità dell'area del rettangolo costruito con tali intervalli.

Esercizio 13. Sia X una variabile aleatoria con funzione di densità di probabilità data da

$$f(x) = Kx\mathbf{1}_{[0,2]}(x).$$

a) Determinare il valore della costante K;
b) Determinare la funzione di distribuzione di $Y = \min(1, X)$.