

Corso di Laurea Triennale in Matematica
Insegnamento di Metodi Probabilistici per l'Economia e la Finanza
A.A. 2013/2014
Programma d'Esame

1. Introduzione

Valori attesi di variabili aleatorie e giochi equi. Cenni su: decisioni in condizioni di incertezza, situazioni di rischio e atteggiamenti nei confronti del rischio; su funzioni di utilità e principio dell'utilità attesa. Opzioni call e opzioni put basate su un titolo sottostante e problema del prezzaggio.

2. Investimenti non rischiosi e tassi di interesse

Capitalizzazione in regime di interesse semplice, composto e misto. Relazioni fra capitale, tasso di interesse, tempo di investimento e montante, nei diversi regimi di capitalizzazione. Regime di capitalizzazione composta e interesse annuo effettivo in caso di interessi ricalcolati in sottoperiodi. Principio di Equivalenza Finanziaria. Valore attualizzato di un flusso di cassa. Capitalizzazione composta in tempo continuo, crescita esponenziale e funzione esponenziale.

3. Integrali rispetto a misure di probabilità e valori attesi di variabili aleatorie

Richiami su spazi di probabilità. σ -algebre di sottoinsiemi. Misure σ -additive e misure di probabilità. Continuità di una misura di probabilità. Variabili aleatorie. Intersezione fra σ -algebre e struttura di reticolo della famiglia delle sotto- σ -algebre di una σ -algebra fissata. σ -algebre generate da famiglie di sottoinsiemi, da variabili aleatorie e da famiglie di variabili aleatorie. Significato della relazione di inclusione fra σ -algebre. Misurabilità di una variabile aleatoria rispetto ad una σ -algebra. Caso di una σ -algebra generata da una partizione (misurabile) finita. Definizione di integrale di una variabile aleatoria rispetto ad una misura σ -additiva e rispetto ad una misura di probabilità. Valore atteso di una variabile aleatoria e proprietà fondamentali.

4. Valori attesi condizionati e martingale

Assoluta continuità di una misura rispetto ad un'altra misura; densità. Enunciato del Teorema di Radon-Nikodym. Definizione di valore atteso di una variabile aleatoria condizionato ad una σ -algebra. Proprietà fondamentali dei valori condizionati; condizionamenti ripetuti. Filtrazioni e processi adattati rispetto a filtrazioni. Condizione di martingala, di un processo stocastico a tempo discreto, rispetto ad una filtrazione; filtrazione interna di un processo stocastico a tempo discreto; condizione di martingala. Proprietà basilari delle martingale ed esempi fondamentali. Processi predicibili e trasformazioni di martingale (analogo dell'integrale stocastico a tempo discreto).

5. Mercati finanziari

Definizioni fondamentali sui mercati finanziari. Bonds e titoli rischiosi; portafoglio di titoli; vendite allo scoperto. Usuali assunzioni circa il mercato. Definizione di arbitraggio. Strategie autofinanzianti. Mercato attualizzato. Payoff o obbligazioni al tempo N ; payoff "path-dependent" e "path-independent";

prezzo di copertura inferiore e superiore di un payoff. Payoff replicabile e strategie replicanti. Prezzo di non arbitraggio di un payoff. Mercato N -completo. Vettore aleatorio dei prezzi dei titoli rischiosi sul mercato e misura di martingala equivalente ad una misura di probabilità fissata. Esistenza ed eventuale unicità della misura di martingala equivalente. Trasformazioni di martingale e proprietà di martingala del processo dei valori di portafogli autofinanzianti, sotto condizioni di non arbitraggio. Primo e secondo teorema fondamentale del prezzaggio. Paradosso di S. Pietroburgo.

6. Modelli binomiali multiperiodali e approssimazione della Formula di Black e Scholes.

Modelli binomiali multiperiodali. Condizione di non arbitraggio e completezza del mercato. Prezzo di non arbitraggio di un payoff al tempo N , sotto la condizione di non arbitraggio. Prezzo di opzioni europee, put e call. Distribuzioni lognormali. Cenni su moto browniano e moto browniano geometrico. Formula di Black e Scholes. Approssimazione della Formula di Black e Scholes tramite successioni di modelli binomiali multiperiodali.

Testi consigliati

G. Nappo. Appunti per il Corso di Metodi Probabilistici per l'Economia e la Finanza A.A. 2008/'09 (in rete)

A. Pascucci. Calcolo Stocastico per la Finanza. Springer (2008)

S. Ross. An Introduction to Mathematical Finance. Cambridge University Press (1999)