ESAME DI ALGEBRA 1

16 GIUGNO 2014

1) Sia $\mathbb{N}$ l'insieme degli interi positivi $\{1, 2, \ldots\}$. Si consideri su $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ la relazione $\sim$ così definita:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff (x + y) \cdot \operatorname{mcd}(x', y') = (x' + y') \cdot \operatorname{mcd}(x, y).$$

Si dimostri che:

a) $\sim$ è una relazione di equivalenza;
b) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}/\sim$ è numerabile.

2) Determinare per quali valori del parametro intero a il seguente sistema di congruenze ammette soluzioni e, in tal caso, determinarle

$$\begin{cases} 2x \equiv 7 \pmod{15} \\ 3ax \equiv 12 \pmod{21} \end{cases}.$$

3) Sia G un gruppo abeliano finito e $x, y \in G$ di ordini p e q, rispettivamente, tali che $\operatorname{mcd}(p, q) = 1$. Dimostrare che G contiene un elemento di ordine pq.

4) Dire se l'anello $A = \mathbb{Q}[x]/(x^3 + 6x + 12)$ è un campo. Detta $\pi : \mathbb{Q}[x] \to A$ la proiezione, calcolare, se esiste, l'inverso di $\pi(x^3)$ in A.

5) Dimostrare che nell'anello $\mathbb{Z}[\sqrt{-7}] = \{n + m\sqrt{-7} \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$, l'elemento 2 è irriducibile ma non primo.