Esercizi Di Algebra 1

Venerdì 30 Maggio, 2014

Interi di Gauss. Fattorizzazione.

Esercizio 1. Determinare tutti i primi di Gauss di valutazione minore o uguale a 14, a meno di associati.

Esercizio 2. In $\mathbb{Z}[i]$ decomporre gli elementi $z = 143 + 143i$ e $w = 11 + 55i$ in fattori irriducibili.

Esercizio 3. Siano $z = -1 + 21i$ e $w = 2 + 5i$ interi di Gauss. Trovare MCD(z,w).

Esercizio 4. Si considerino gli interi di Gauss $z = 9+33i$ e $w = 13$. Trovare $MCD(z, w)$ e fattorizzare sia z che w in fattori irriducibili di $\mathbb{Z}[i]$.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti polinomi in $\mathbb{Q}[x]$:

$$\begin{aligned} p(x) &= x^9 + 5x^7 - 3x^5 - 12x^4 - 12x^3 - 18x^2 + 12x + 12 \\ q(x) &= x^8 - x^7 + 3x^6 - 3x^5 - 9x^4 - 3x^3 + 18x^2 - 6 \end{aligned}$$

Sia $I \subset \mathbb{Q}[x]$ l'ideale generato da $p(x)$ e $q(x)$. Si dimostri che $\mathbb{Q}[x]/I$ é un campo e se ne calcoli la dimensione su $\mathbb{Q}$.

Esercizio 6. Trovare, se esiste, un polinomio $p(x) \in \mathbb{Q}[x]$ che sia soluzione del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} p(x) \equiv x^2 - 3x + 1 \pmod{x^3 + 6x + 3} \\ p(x) \equiv -x^3 + 1 \pmod{x^2 + x + 1} \end{cases}$$

Esercizio 7. Per p un primo e siano $A := \mathbb{Z}/(p)[x]/(f(x))$ e $B := \mathbb{Z}/(p)[x]/(g(x))$. Per $p = 2, 3, 5, 7, 11$ discutere 1) se A e B sono campi; 2) Nel caso lo siano se ne determini la dimensione su $\mathbb{Z}/(p)$; 3) A e B sono isomorfi? Dove:

Studenti di Spinelli: $f(x) := x^2 - 3$, $g(x) := x^2 + 2$;
Studenti di De Concini: $f(x) := x^2 + 8$, $g(x) := x^2 + 9$.

Esercizio 8. Sia A UFD, $a \in A \setminus \{0\}$ ed $I = (a)$. Sia $a = x_1^{t_1} \cdots x_n^{t_n}$ la fattorizzazione di a in irriducibili. Dimostrare che l'anello quoziente A/I non ha elementi nilpotenti se e solo se $t_1 = t_2 = \cdots = t_n = 1$.

Esercizio 9. Dire per quali dei seguenti polinomi $p(x)$, l'anello quoziente $\mathbb{Q}[x]/(p(x))$ non ha elementi nilpotenti: 1) $p(x) = x^4+3x^3-3x^2-11x-6$; 2) $p(x) = x^7+4x^3+12x^2+6x+13$; 3) $p(x) = x^4 + x^3 - x - 1$. (Suggerimento: si potrebbe usare il fatto dimostrato a lezione che p(x) non ha fattori multipli se e solo se MCD(p,p')=1..)