Esercizi Di Algebra 1

Venerdì 16 Maggio, 2014

Settimana 8: Interi di Gauss. Fattorizzazione.

Esercizio 1. Trovare il massimo comun divisore in $\mathbb{Z}/(2)[x]$ degli elementi $p(x), q(x) \in \mathbb{Z}/(2)[x]$ definiti come segue:

$$p(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x + 1 \quad q(x) = x^7 + 1.$$

Fattorizzare $p(x)$ in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}/(2)[x]$.

Esercizio 2. Sia $A := \mathbb{Z}/(7)[x]$.

1. Fattorizzare in fattori irriducibili $p(x) = x^2 + x + 1$ in A.
2. Nell'anello $B := A/(p(x))$ dire quali dei seguenti elementi sono invertibili: x^2-x+2, x, $(x+1)^2$.
3. Per ogni elemento invertibile tra quelli sopra considerati, determinare l'inverso e l'ordine nel gruppo moltiplicativo degli invertibili di B.

Esercizio 3.

1. Dimostrare che il polinomio $x^5 - 5x^4 - 6x - 1$ é irriducibile su $\mathbb{Z}$, riducendo i suoi coefficienti modulo un opportuno primo p ed osservando che é irriducibile su $Z/(p)$.
2. Dimostrare che il polinomio $x^4 - 10x^2 + 1$ é irriducibile su $\mathbb{Z}$ mentre é riducibile su $\mathbb{Z}/(p)$ per ogni primo p.

Esercizio 4. Consideriamo il polinomio $f(x) = 2x^4 - 6x^3 - 2x + 6$.

1. Decomporre in fattori irriducibili $f(x)$ su $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ed $\mathbb{R}$.
2. Stabilire se in $\mathbb{R}[x]/(f(x))$ la classe individuata da $x^4 - 2x^3 - x + 2$ è un divisore dello zero.

Esercizio 5. Si considerino i seguenti interi di Gauss

$$z = 5 - i \quad w = 2 + 2i$$

1. Calcolare quoziente e resto della divisione euclidea tra z e w. Quoziente e resto sono unici?
2. Determinare il massimo comun divisore tra z e w in $\mathbb{Z}[i]$.
3. Fattorizzare z e w in fattori irriducibili in $\mathbb{Z}[i]$, raggruppando i primi associati.