Esercizi Di Algebra 1

Venerdì 16 Maggio, 2014

Settimana 7: PID. Elementi irriducibili e primi.

Esercizio 1. In $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}] := \{a + b\sqrt{-3} | \, a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$ dimostrare che 2 é irriducibile ma non primo.

Esercizio 2. Due elementi a, b di un anello commutativo unitario A si dicono *associati* se esiste $h \in \mathcal{U}(A)$ tale che $a = hb$. Dimostrare che la relazione di *essere associati* é una relazione di equivalenza e descrivere la classe di un elemento invertibile.

Esercizio 3. Si provi che in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ l'ideale $(3, \sqrt{-5} - 1)$ non é un ideale principale. Dedurne che $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ non é un dominio euclideo.

Esercizio 4. Dimostrare che un omomorfismo suriettivo da un campo ad un anello con piú di un elemento deve essere un isomorfismo.

Esercizio 5. Sia A un anello unitario, $B \neq 0$ un anello commutativo ed $f : A \to B$ un omomorfismo suriettivo. Dimostrare che B é unitario con unitá data da $f(1)$.

Esercizio 6. Sia $A := \{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} | \, a, b \in \mathbb{Z}\}$ e $f : A \to \mathbb{Z}$ la mappa $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \mapsto a - b$.

1. Dimostrare che A é un anello ed f un omomorfismo di anelli.
2. Determinare il nucleo di f.
3. Mostrare che $A/\ker f \simeq \mathbb{Z}$.
4. Il nucleo di f é un ideale primo? E' massimale?

Esercizio 7. Calcolare in $\mathbb{Q}[x]$ il massimo comun divisore $d(x)$ dei polinomi $f(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x + 2$ e $g(x) = x^4 + 3x^2 + 4$; determinare $h(x)$ e $k(x)$ tali che risulti $f(x)h(x) + g(x)k(x) = d(x)$.

Esercizio 8. Determinare il campo dei quozienti del dominio $\mathbb{Z}[x]$.

Esercizio 9. Sia A un dominio (commutativo, unitario). Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ due interi positivi e coprimi fra loro e siano $a, b \in A$ tali che $a^n = b^n$ e $a^m = b^m$. Dimostrare che $a = b$.

Esercizio 10. Qual è il resto della divisione di $x^{81} + x^{49} + x^{25} + x^9 + x$ per $x^3 - x$? (Suggerimento: ovviamente non serve svolgere tutti calcoli. Il resto sarà un polinomio di grado al più... Possiamo calcolare che valori assume negli zeri di $x^3 - x$.)

Esercizio 11.
- In $\mathbb{Z}[x]$ dividere il polinomio x^5+14x^3+1 per il polinomio (monico!) $x^3 + 13x - 3$.
- In $\mathbb{Z}/(5)[x]$ dividere il polinomio $x^5 + 2x^3 + 1$ per il polinomio $3x^3 + 2x + 4$.
- In $\mathbb{Z}[i]$ calcolare $d := MCD(13, 1+44i)$ e trovare $x, y \in \mathbb{Z}[i]$ tali che $d = 13x+(1+44i)y$.

Esercizio 12. Quale dei seguenti polinomi sono irriducibili? (Ricordate che l'essere irriducibile o no può dipendere dall'anello in cui consideriamo il polinomio.)

$$\begin{array}{ll}
1) f(x) = 3x^7 - 5x^4 + 12x - 1 \in \mathbb{R}[x]; & 6) f(x) = x^2 - 3x + 3 \in \mathbb{R}[x]; \\
2) f(x) = 6x^7 - 5x^2 + 4x - 3 \in \mathbb{C}[x]; & 7) f(x) = 7x^2 + 21 \in \mathbb{Z}[x]; \\
3) f(x) = 3x^3 - x^2 + 6x - 2 \in \mathbb{Q}[x]; & 8) f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 9x - 6 \in \mathbb{Q}[x]; \\
4) f(x) = x^2 + x + 1 \in \mathbb{Q}[x]; & 9) f(x) = x^4 + 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]; \\
5) f(x) = x^6 + x^3 + 1 \in \mathbb{Q}[x]; & 10) f(x) = 2x^2 + 3x - 1 \in \mathbb{R}[x].
\end{array}$$

Esercizio 13. Per ognuno dei seguenti elementi di $\mathbb{Z}/(24)[x]$ dire se é invertibile, nilpotente, divisore dello zero: $18x^5 + 12x^{24}$, $5 + 2x^4 + 6x^{24} + 8x^{48}$, $2 + 10x^{12} + 16x^{24}$.

Esercizio 14. Trovare gli elementi $c \in \mathbb{Z}/(3)$ tali che $\mathbb{Z}/(3)[x]/(x^3 + cx^2 + 1)$ sia un campo e, per ognuno, calcolarne la cardinalitá..

Esercizio 15. Dimostrare che il polinomio $x^3 + x^2 + 2$ é irriducibile su $\mathbb{Z}/(3)$. Usare questo risultato per costruire un campo con 27 elementi.

Esercizio 16. Mostrare che il polinomio $1 + x + x^3 + x^4$ *non* é irriducibile sopra ogni campo.

Esercizio 17. Sia $I \subseteq A$ un ideale di un anello commutativo unitario A. Si ricorda che il *radicale* di I é definito come segue

$$\sqrt{I} := \{p \in A |\ \text{esiste } n \geq 1 \text{ tale che } p^n \in I\}.$$

1. Dimostrare che $\sqrt{I} \subseteq A$ é un sottoanello ideale di A e che $I \subseteq \sqrt{I}$.
2. Un ideale $I \subseteq A$ si dice *ideale radicale* se $\sqrt{I} = I$. Chiaramente, l'ideale degli elementi nilpotenti $\mathcal{N}(A)$ di A é un ideale radicale di A.
3. Dato un omomorfismo $f : A \longrightarrow B$ di anelli dimostrare che $f^{-1}(\mathcal{N}(B)) = \sqrt{\ker f}$. Dedurne che se f é suriettivo, allora $\mathcal{N}(B) \simeq \sqrt{\mathrm{Ker} f}/\mathrm{Ker}\ f$.
4. Utilizzare il punto precedente per dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}/(n)$ non ha elementi nilpotenti se e solo se n é un prodotto di primi distinti.