Esercizi Di Algebra 1

Venerdì 9 Maggio, 2014

Settimana 6: Anelli. Ideali.

Esercizio 1. Sull'anello degli interi $\mathbb{Z}$ si consideri la seguente operazione ausiliaria (detta "tropicale"):

$$\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : \; (n, m) \mapsto m \oplus n := \min(n, m).$$

Si dimostri che l'operazione tropicale è associativa, commutativa ma non é distributiva rispetto alla somma $+$. Dedurne che $\mathbb{Z}_{\min} := (\mathbb{Z}, +, \oplus)$ *non* è un anello.

Sia $A = (A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario: Ricordiamo che un elemento $x \in A$ si dice *nilpotente* se esiste un intero $n > 0$ tale che $x^n := x \cdot x \cdot \ldots \cdot x$ (n volte) $= 0$; un elemento u si dice *invertibile* o una *unità* se esiste $v \in A$ tale che $u \cdot v = 1$.

Esercizio 2. Sia $A = (A, +, \cdot)$ un anello commutativo unitario. Dimostrare che dato un elemento nilpotente $x \in A$, l'elemento $1 + x$ è una unità. Dedurne che la somma di un elemento nilpotente e di una unità è una unità.

Esercizio 3. Sia A un anello commutativo unitario. Sia $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in A[x]$. Dimostrare

1. $f(x)$ è invertibile in A[x] se e solo se $a_0 \in A$ è invertibile e $a_1, \cdots, a_n$ sono nilpotenti.
2. $f(x)$ è un divisore dello zero se e solo se esiste $a \in A \subset A[x]$ tale che $af(x) = 0$.
3. $f(x)$ è nilpotente se e solo se $a_0, \cdots, a_n \in A$ sono nilpotenti.

Esercizio 4. Sia un anello commutativo. Dimostrare che l'insieme $\mathcal{N}$ degli elementi nilpotenti di A è un ideale di A. Dimostrare, esibendo un controesempio, che l'ipotesi di commutativià é necessaria. Inoltre dimostrare che il quoziente $A/\mathcal{N}$ è un anello privo di elementi nilpotenti non-nulli.

Esercizio 5. Sia A un anello ed I e J due ideali di A. Dimostrare che i due insiemi

$$I + J := \{a + b |\, a \in I,\, b \in J\} \quad IJ := \{\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i |\, a_i \in I,\, b_i \in J\, n \geq 0\}$$

sono ideali di A.

Esercizio 6. Siano A e B due anelli ed $f : A \to B$ un omomorfismo tra loro. Dimostrare che

1. l'immagine di f ùn sottoanello di B;
2. se B è un dominio allora Imf è un dominio;
3. Se $J \subset B$ è un ideale allora $f^{-1}(J) \subset A$ è un ideale;
4. Se $I \subset A$ è un ideale ed f è suriettiva allora $f(I)$ è un ideale.
5. Mostrare un esempio in cui l'immagine di un ideale di A non è un ideale in B.

Esercizio 7. Sia A un anello commutativo unitario. Siano I_1 e I_2 due ideali tali che $I_1+I_2 = A$. Si dimostri che $I_1 I_2 = I \cap J$. Inoltre si dimostri che $A/(I_1 \cap I_2) \simeq A/I_1 \oplus A/I_2$.

Esercizio 8. Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ e (m) ed (n) i corrispondenti ideali. Provare che $(m) \cap (n) =$ (mcm (m,n)), $(m, n) = (MCD(m, n))$.

Esercizio 9. Determinare tutti gli ideali di $\mathbb{Z}/(15)$. Per ognuno di essi dire se si tratta di un ideale primo e/o massimale.

Esercizio 10. Dimostrare che l'anello $\mathbb{Z}/(n)$ é un anello ad ideali principali, per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 11. Un omomorfismo $f : A \to B$ di anelli si dice un *monomorfismo* se la funzione f è iniettiva. Dimostrare che f è un monomorfismo se e solo se $\mathrm{Ker}(f) = \{0\}$.