

## ESONERO DI ALGEBRA 1

23 APRILE 2014

1) Si determini l'insieme delle soluzioni del seguente sistema di congruenze

$$\begin{cases} 7x \equiv 1 & (\text{mod } 2) \\ 2459^{2707}x \equiv -1 & (\text{mod } 7) \\ 8x \equiv -4 & (\text{mod } 15) \end{cases}$$

2) Si considerino le seguenti relazioni sull'insieme  $\mathbb{R}$  dei numeri reali:

- (1)  $a \sim b$  se  $ab(a - b) = 0$ .
- (2)  $a \sim b$  se  $ab \neq 0$ .
- (3)  $a \sim b$  se  $|a - b| < 5$ .
- (4)  $a \sim b$  se  $(a - b)(a + b) = 0$ .

Determinare quali di tali relazioni sono di equivalenza o meno motivando la risposta. In caso affermativo determinare la cardinalità di ciascuna classe di equivalenza.

3) Determinare per quali  $n \in \mathbb{N}$ , si ha che  $a^2 \equiv b^2 \pmod{n}$  implica  $a \equiv b \pmod{n}$  per ogni  $a, b \in \mathbb{Z}$

4) Sia  $G$  un gruppo finito di ordine  $n$ . Si consideri l'applicazione  $f : G \rightarrow G$  definita da  $f(x) = x^2$ .

- (1) Dimostrare che  $f$  è un omomorfismo se e solo se  $G$  è abeliano.
- (2) Dimostrare che  $f$  è un automorfismo se e solo se  $G$  è abeliano e di ordine dispari.

5) Si consideri l'insieme delle matrici reali  $2 \times 2$  della forma

$$B := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

- (1) Dimostrare che  $B$  con il prodotto righe per colonne è un gruppo.
- (2) Dimostrare che

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

è un sottogruppo normale di  $B$  isomorfo al gruppo additivo  $(\mathbb{R}, +)$ .

- (3) Dimostrare che  $B/U$  è isomorfo al gruppo moltiplicativo  $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ .