

Esercizi Di Algebra 1

Venerdì 11 Aprile, 2014

Settimana 5: Gruppi. Congruenze lineari, TCR

Esercizio 1. Calcolare:

1. l'ultima cifra decimale di 123123^{321321} ;
2. il resto della divisione di 4^{2013} per 15 e per 51;
3. il resto della divisione di $1329878398928783749723984792102387499287^2$ per 4.

Esercizio 2. Risolvere il seguente sistema di congruenze lineari:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7x \equiv 9 \pmod{17} \\ 11x \equiv 1 \pmod{7} \\ x \equiv -1 \pmod{2} \\ 37497^{754325}x \equiv 3 \pmod{5} \end{array} \right.$$

Esercizio 3. Dimostrare che $1 \equiv -1 \pmod{n}$ se e solo se $n=1$ oppure $n=2$.

Esercizio 4. Per ogni $a \in \mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{R}$, sia $t_{a,b} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da $t_{a,b}(x) = ax + b$ e sia $\text{Aff}_1 := \{t_{a,b} | a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}\}$. Dimostrare che Aff_1 è un gruppo rispetto alla composizione. Sia $H := \{t_{a,0} | a \in \mathbb{R}^*\}$ e $K := \{t_1, b | b \in \mathbb{R}\}$. Dimostrare che H e K sono sottogruppi di G , che $H \simeq (\mathbb{R}^*, \cdot)$, $K \simeq (\mathbb{R}, +)$ e $G = HK$. Inoltre dimostrare che K è normale in G .

Esercizio 5. Sia S_8 il gruppo simmetrico su 8 lettere. Per ognuno dei seguenti elementi di S_8 si scrivano gli inversi, si determini il loro ordine (periodo) e si determini una loro scrittura in cicli disgiunti:

$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 & 6 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 6 & 2 & 8 & 7 & 1 & 5 \end{array} \right),$$
$$\left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 3 & 2 & 4 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{array} \right), \quad \left(\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 8 & 7 & 4 \end{array} \right),$$

Esercizio 6. In S_4 si determini il sottogruppo generato dagli elementi (123) e (14) .

Esercizio 7. Determinare il centro di $GL(n, k)$, per un qualche campo k , ed il centro del gruppo simmetrico S_3 .

Esercizio 8. Siano $\sigma = (147)(35)$ e $\tau = (18)(345)(67)$. Calcolare il coniugato $\sigma' := \tau\sigma\tau^{-1}$ di σ mediante τ . Si noti che σ' ha la stessa scrittura ciclica di σ e gli interi che compaiono nei cicli di σ' si ottengono applicando la permutazione τ agli interi che compaiono nei cicli di σ .

Esercizio 9. Sia S_n il gruppo simmetrico in $n \geq 2$ lettere. Ad ogni elemento $\sigma \in S_n$ si associa una matrice A_σ , $n \times n$ definita sui vettori di base $\{e_1, \dots, e_n\}$ come segue

$$A_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}.$$

Una permutazione σ si dice *pari* se $\det A_\sigma = 1$ e si dice *dispari* se $\det A_\sigma = -1$. Determinare tutte le matrici $A_\sigma \in GL(3, k)$ date dagli elementi $\sigma \in S_3$. Classificare le permutazioni pari e quelle dispari.

Esercizio 10. Siano σ e τ le seguenti due permutazioni in S_4 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Si determini il sottogruppo $H \leq G$ generato da σ e τ e si studino le classi laterali destre e sinistre rispetto ad H .