Esercizi Di Algebra 1

Venerdì 4 Aprile, 2014

Settimana 4: Congruenze lineari e Strutture algebriche

Esercizio 1. Dimostrare che per ogni primo $p > 0$ si ha $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \mod p$, per ogni $a, b \in \mathbb{Z}$.

Esercizio 2. I seguenti esercizi sono stati dati dal Prof. De Concini a lezione. Svolgerli.

1. Dimostrare che $5^{2n+1} + 1$ è un multiplo di 6, per ogni $n \in \mathbb{N}$;
2. Dimostrare che 3 divide $(4^n - 1)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
3. Dimostrare che 6 divide $(n^3 + 5n)$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
4. Calcolare 3^{1001} modulo 7, 347^{1001} modulo 11 e 347^{101} modulo 101.

Esercizio 3. Trovare il massimo comun divisore delle seguenti coppie di numeri interi:

1. 234 e 762;
2. 1001 e 128;
3. 765 e 203;
4. 376 e 254.

Esercizio 4. Calcolare, se esistono, tutte le soluzioni delle seguenti congruenze lineari.

1. $7x \equiv 11 \mod 9$;
2. $2x \equiv 5 \mod 7$;
3. $6x \equiv 5 \mod 8$;
4. $134524x \equiv 36939 \mod 546780$;
5. $19x \equiv 30 \mod 40$;
6. $234x \equiv 60 \mod 762$;
7. $128x \equiv 833 \mod 1001$.

Esercizio 5. Trovare l'inverso di 297 modulo 349. Utilizzare il risultato per risolvere la congruenza $297x \equiv 3 \mod 349$.

Esercizio 6. Trovare gli elementi invertibili dell'anello $\mathbb{Z}/(20)$ e per ognuno calcolarne l'inverso. Quanti sono?

Esercizio 7. Determinare, se esistono, le soluzioni del seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 4 & \mod 10 \\ 2x \equiv 4 & \mod 12 \\ 5x \equiv 6 & \mod 14\,. \end{cases}$$

Esercizio 8. Studiare, al variare del parametro $b \in \mathbb{Z}$, il seguente sistema di congruenze lineari

$$\begin{cases} x \equiv 3b & \mod 22 \\ x \equiv 1 & \mod 10 \\ x \equiv 6 & \mod 14\,. \end{cases}$$

Esercizio 9. A lezione abbiamo visto che il Teorema Cinese del Resto ha la seguente riformulazione (verificare i dettagli): dati due numeri interi n,m coprimi tra loro (ovvero $MCD(m,n) = 1$) allora l'applicazione $f : \mathbb{Z}/(mn) \to \mathbb{Z}/(m) \times \mathbb{Z}/(n)$ definita come segue $f([x]_{mn}) = ([x]_m, [x]_n)$ è una biiezione. Dimostrare che f è un omomorfismo di anelli, ovvero conserva le operazioni.

Esercizio 10. I seguenti esercizi sono stati dati dal Prof. Spinelli a lezione. Risolverli.

1. Dimostrare che dato un gruppo G ed un suo sottoinsieme non vuoto $\emptyset \neq H \subset G$, si ha
$$H \leq G \Leftrightarrow xy \in H,\, x^{-1} \in H,\, \forall x, y \in H \Leftrightarrow xy^{-1} \in H,\, \forall x, y \in H$$
2. Sia G un gruppo ed $H \leq G$ un suo sottogruppo. Su G si consideri l'equivalenza $\sim_H$ data da: $x \sim_H y \Leftrightarrow xy^{-1} \in H$. Si dimostri che $\sim_H$ è compatibile con l'operazione di G se e solo se $xH = Hx$ per ogni $x \in G$. In tal caso H si dice un sottogruppo *normale*.
3. Dimostrare che un sottogruppo $H \leq G$ di indice 2 è normale.

Esercizio 11. Determinare gli elementi invertibili ed i divisori dello zero nei seguenti anelli:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\,, \quad \mathbb{Z}/(20)\,, \quad \mathbb{Z}/(4) \times \mathbb{Z}/(2)\,, \quad \mathbb{Z}/(17)\,, \quad \mathbb{Z}[x]\,.$$

Esercizio 12. Determinare quali dei seguenti siano omomorfismi di anelli.

1. $f \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = 2x \ \forall x \in \mathbb{Z}$.
2. $f \colon \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Z}_2$, $f(x) = x^2 \ \forall x \in \mathbb{Z}_2$.
3. $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x| \ \forall x \in \mathbb{R}$.
4. $\varphi \colon \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$, $\varphi(f(x)) = f(0)$, per ogni polinomio $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$.
5. $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$, $\varphi(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & a \end{pmatrix} \ \forall a \in \mathbb{Z}$.