Esercizi Di Algebra 1

Venerdì 28 Marzo, 2014

Settimana 4: Aritmetica modulare (piccolo teorema di Fermat) e Strutture algebriche

Esercizio 1. Calcolare la classe resto modulo 11 del numero a^b per ognuna delle seguenti coppie (a,b) di numeri naturali:

1. $a = 1342578$, $b = 32690$;
2. $a = 3257891$, $b = 323451692$;
3. $a = 4512$, $b = 3$.

Esercizio 2. Dimostrare il seguente criterio di divisibilitá per 7: il numero naturale $n = \sum_{k=0}^{t} a_k 10^k$ é divisibile per 7 se e solo se $5a_0 + m$ é divisibile per 7, dove $m := \sum_{k=1}^{t} a_k 10^{k-1}$.

Esercizio 3. Calcolare la classe resto modulo 7 del numero a^b per ognuna delle seguenti coppie (a,b) di numeri naturali:

1. $a = 42578$, $b = 32690$;
2. $a = 891$, $b = 392$;
3. $a = 452$, $b = 7$.

Esercizio 4. Dimostrare che dato $k \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$, n divide il numero $\prod_{t=0}^{n-1}(k+t)$.

Esercizio 5. Dimostrare che per ogni $z \in \mathbb{Z}$, 6 divide $z^3 - z$.

Esercizio 6. Dimostrare che 8 divide $(m^2 - 1)$, per ogni intero *dispari* m.

Esercizio 7. Calcolare (7+14)(3-16) modulo 17.

Esercizio 8. Dimostrare l'*identitá di Vandermonde*: dati tre interi $a, b, c > 0$ si ha

$$\sum_{k=0}^{c} \binom{a}{k}\binom{b}{c-k} = \binom{a+b}{c}$$

Esercizio 9. Dimostrare che per ogni intero $m \geq 1$, 2^m divide $n = \sum_{k=0}^{t} a_k 10^k$ se e solo divide $\sum_{k=0}^{m-1} a_k 10^k$.

Esercizio 10.

1. Dimostrare che il quadrato a^2 di un intero a é congruo a zero o ad 1 modulo 4.
2. Quali sono i possibili valori di a^2 modulo 8?

Esercizio 11.

- Dimostrare che 2 non possiede un inverso modulo 6.
- Determinare tutti gli interi n tali che 2 possiede un inverso modulo n.

Esercizio 12. Dimostrare che ogni intero a é congruo alla somma delle sue cifre modulo 9.

Esercizio 13. Dimostrare la proprietá associativa e la proprietá commutativa per la moltiplicazione in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, per un dato n.

Esercizio 14. Consideriamo l'operazione

$$\bullet\colon \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \longrightarrow \mathbb{Q}^2\,, \quad ((a,b),(a',b')) \longmapsto (aa', ab'+b)\,.$$

Provare che:

1. $(\mathbb{Q}^2, \bullet)$ è un monoide;
2. $\forall\, a, b \in \mathbb{Q}$, $\forall\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$,

$$(a,0)^n = (a^n, 0)\,, \quad (1,b)^n = (1, nb).$$

Verificare inoltre se la struttura $(\mathbb{Q}^2, \bullet)$ sia commutativa.