Esercizi Di Algebra 1

Venerdì 21 Marzo, 2014

Settimana 3: Induzione, Cardinalità e definizione di strutture algebriche

Esercizio 1. Siano S e T due insieme finiti e sia $f : S \to T$ una funzione iniettiva. Usando il principio di induzione, dimostrare che $|S| \leq |T|$.

Esercizio 2. Trovare una partizione di $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \cdots\}$ in una famiglia numerabile di sottoinsiemi numerabili di $\mathbb{N}$, ovvero trovare $\mathcal{T} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$ tale che: $\mathcal{T} = \{T_0, T_1, T_2, T_3, \cdots\}$ con $T_i \neq \emptyset$ per ogni $i \geq 1$, $\mathbb{N} = \bigcup_{i \geq 1} T_i$, $T_i \cap T_j = \emptyset$ per $i \neq j$ e ogni parte T_i è numerabile.

Esercizio 3. Sia T un insieme con $n \geq 1$ elementi. Per ogni intero k, si denoti con $\binom{n}{k}$ il numero definito come segue: se $k \geq 0$ allora $\binom{n}{k}$ è il numero di k–sottoinsiemi di T (ovvero di sottoinsiemi di cardinalità k); se $k < 0$ allora $\binom{n}{k} := 0$. Il numero $\binom{n}{k}$ si legge "scegli k tra n".

1. Si dimostri la seguente uguaglianza usando il principio di dicotomia:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}.$$

2. Usando il principio di induzione, si dimostri che

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Esercizio 4. Dimostrare la formula del binomio di Newton (o Teorema Binomiale):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

per ogni $n \geq 1$.

Esercizio 5. Dimostrare le seguenti affermazioni:

1. Dimostrare, possibilmente *senza* usare l'induzione, che

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. Per ogni $n \geq 1$
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$
3. Per ogni $n \geq 1$
$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (\sum_{k=1}^{n} k)^2.$$
4. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed ogni intero $n \geq 1$:
$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}.$$
5. Per ogni intero $n \geq 2$:
$$\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k}) = \frac{1}{n}.$$
6. Per ogni intero $n \geq 3$: $n^2 > 2n+1$.
7. Per ogni intero $n \geq 1$ si ha $n! \geq 2^{n-1}$.
8. Se $x > -1$ allora $(1+x)^n \geq 1+nx$ per ogni $n \geq 0$.

Esercizio 6. Dimostrare che ogni gruppo di ordine 4 è abeliano.

Esercizio 7. Usando il principio di induzione, dimostrare che il determinante di una matrice triangolare superiore $n \times n$ è il prodotto degli elementi sulla diagonale.

Esercizio 8. Sia $(X, \circ)$ una struttura algebrica. Su $\mathcal{P}(X)$ si definisca l'operazione:

$$\begin{aligned} \bullet : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ (A, B) &\longmapsto \{x |\, x \in X,\, \exists a \in A \text{ and } b \in B :\ x = a \circ b\} \end{aligned}$$

Provare che le seguenti affermazioni sono vere:

1. $(X, \circ)$ commutativo $\Longrightarrow$ $(\mathcal{P}(X), \bullet)$ commutativo;
2. $(X, \circ)$ associativo $\Longrightarrow$ $(\mathcal{P}(X), \bullet)$ associativo;
3. $(X, \circ)$ ha un elemento neutro $\Longrightarrow$ $(\mathcal{P}(X), \bullet)$ ha un elemento neutro.

Esercizio 9. Sia $A := \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ e definiamo su A le seguenti operazioni:

$$(a, x) + (b, y) := (a+b, x+y) \quad (a, x) \cdot (b, y) := (ab, xy)$$

Dire se:

1. $B := \{(3a, x) |\, a, x \in \mathbb{Z}\}$ è un sottoanello di A.
2. Per ogni $(a, x) \in A$ e $(b, y) \in B$, si ha $((a, x) \cdot (b, y)) \in B$.