Esercizi Di Algebra 1

Venerdì 14 Marzo, 2014

Settimana 2

Esercizio 1. Sia $X_1 = \{((0,0),(3,3),(1,3),(3,1))\}$ e $X_2 = \{(1,3),(1,1),(0,0),(1,2),(2,1),(2,2)\}$.

- Per ciascuno degli insieme X_1, X_2, $X_1 \cap X_2$, $X_1 \cup X_2$, $X_2 \setminus X_1$ dire se si tratta di
  1. una relazione riflessiva su $\{0,1,2,3\}$;
  2. una relazione simmetrica;
  3. una funzione da $\{0,1,2,3\}$ a $\{0,1,2,3\}$.
- Trovare un sottoinsieme massimale di $\{0,1,2,3\}$ su cui X_2 é simmetrica.
- Trovare un sottoinsieme massimale di $\{0,1,2,3\}$ su cui $X_2 \setminus X_1$ é simmetrica.

Esercizio 2. Sia X un insieme. Una *partizione* $\mathcal{T}$ di X é un sottoinsieme dell'insieme $\mathcal{P}(X)$ delle parti di X, tale che per ogni $A, B \in \mathcal{T}$, se $A \neq B$ allora $A \cap B = \emptyset$ e $\bigcup_{A \in \mathcal{T}} A = X$. Mostrare che, data una partizione $\mathcal{T}$ di X, la relazione

$$R := \{(x,y) \in X \times X | \, \text{esiste } A \in \mathcal{T} \text{ tale che } x, y \in A\}$$

é una relazione di equivalenza.

Esercizio 3. Siano X ed Y due insieme. Sia $R \subseteq X \times Y$ una relazione tra X ed Y. Sia $R_Y \subseteq Y \times Y$ una relazione su Y. Definiamo

$$R_X := \{(x_1, x_2) \in X \times X | \, \text{esiste } (y_1, y_2) \in R_Y \text{ con } (x_1, y_1) \in R, \, (x_2, y_2) \in R\}.$$

Dimostrare che

1. Se R_Y gode della proprietá simmetrica (risp. transitiva) allora anche R_X gode della proprietá simmetrica (risp. transitiva).
2. Supponiamo che per ogni $x \in X$ esista almeno un $y \in Y$ tale che $(x,y) \in R$. Se R_Y gode della proprietá riflessiva, allora anche R_X gode della proprietá riflessiva.

Esercizio 4. Sia X un insieme con n elementi. Trovare una biiezione tra l'insieme $\mathcal{P}(X)$ e l'insieme $\{f : X \to \{0,1\} | \, \text{f funzione}\}$. Dedurre che $\mathcal{P}(X)$ ha 2^n elementi.

Esercizio 5. Sia $X := \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\}$. Verificare quali proprietá (riflessiva, simmetrica, antisimmetrica, transitiva) sono soddisfatte e quali non sono soddisfatte dalle relazioni su X date di seguito. Nel caso si tratti di una relazione di equivalenza, determinare le classi di equivalenza.

1. $R = \{(f,g) \in X \times X | f(0) \leqslant g(0)\}$.

2. $R = \{(f, g) \in X \times X | f(0) < g(0) \text{ o } f = g\}$.

3. $R = \{(f, g) \in X \times X | f(i) \leqslant g(i)\, \forall i \in \mathbb{N}\}$.

4. $R = \{(f, g) \in X \times X | f = g \text{ o esiste } k \geqslant 1 \text{ tale che } f(i) = g(i)\, \forall i < k \text{ e } f(k) < g(k)\}$.

5. $R = \{(f, g) \in X \times X | f(0) + g(0) \text{ é pari}\}$.

Esercizio 6. 1. Dimostrare che il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali può essere ordinato in un unico modo, ovvero esiste un'unica relazione $<$ su $\mathbb{R}$ tale che

   (a) per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ diversi tra loro vale $x < y$ o $y < x$;

   (b) se $x < y$ allora $x + z < y + z$ per ogni $z \in \mathbb{R}$;

   (c) se $0 < x$ e $0 < y$ allora $0 < xy$.

   In particolare $<$ coincide con l'usuale relazione d'ordine $\leqslant$ su $\mathbb{R}$ (infatti $\leqslant$ soddisfa alle proprietá (a), (b) e (c)).

2. Dimostrare che non esiste una relazione su $\mathbb{C}$ con le stesse proprietà.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{C} = \{a + ib | \, a, b \in \mathbb{R}, \, i^2 = -1\}$ l'insieme dei numeri complessi. Siano $z, w \in \mathbb{C}$. Si considerino le seguenti relazioni in $\mathbb{C}$:

1. $z \sim w$ se e solo se $|z| = |w|$.

2. $z \sim w$ se e solo se $\mathfrak{Re}(z) \leqslant \mathfrak{Re}(w)$.

3. $z \sim w$ se e solo se $\mathfrak{Im}(z) \leqslant \mathfrak{Im}(w)$.

4. $z \sim w$ se e solo se $z - w \in \mathbb{Z}$.

Dire quali sono di equivalenza, quali di ordine. Descrivere l'insieme quoziente nelle relazioni di equivalenza, esibendo una biiezione con un insieme noto.

Esercizio 8. Sia $S := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e si consideri la relazione su S data da

$$(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2) \text{ se e solo se } 3(s_1 - s_2) = 5(t_2 - t_1).$$

Si dimostri che $\sim$ é una relazione di equivalenza e che $X/\sim$ é equipotente a $\mathbb{Z}$.

Esercizio 9. Sia $S := \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ e siano $r, q \geqslant 1$ due numeri interi positivi e primi tra loro. Si consideri la relazione su S data da

$$(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2) \text{ se e solo se } r(s_1 - s_2) = q(t_2 - t_1).$$

Si dimostri che $\sim$ é una relazione di equivalenza e che $S/\sim$ é equipotente a $\mathbb{Z}$.

Esercizio 10. Sia $\mathbb{R}_+$ l'insieme dei numeri reali positivi. Sia $S = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ e si consideri la relazione su S data da

$$(s_1, t_1) \sim (s_2, t_2) \text{ se e solo se } s_1^2 - t_2^2 + 2s_1t_1 = s_2^2 - t_1^2 + 2s_2t_2.$$

Si dimostri che $\sim$ é una relazione di equivalenza e che $S/\sim$ é equipotente a $\mathbb{R}_+$.