

1 Diario delle lezioni

6 marzo Richiami sul teorema del completamento per spazi metrici. Incompletezza dello spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$ nella metrica euclidea integrale. Richiami sulla assoluta continuità dell'integrale di Lebesgue. Panoramica sulla teoria della derivazione nell'ambito della misura di Lebesgue: Funzioni assolutamente continue. Relazioni con la lipschitzianità e l'uniforme continuità. Assoluta continuità della funzione integrale di una funzione integrabile secondo Lebesgue in un intervallo. Funzioni a variazione limitata. Le funzioni monotone sono a variazione limitata. Discontinuità delle funzioni monotone. Esempio di funzione monotona in $[0, 1]$ discontinua sui razionali e continua sugli irrazionali (sd). Le funzioni monotone sono derivabili q.o. con derivata ≥ 0 q.o. e misurabile (sd). Una funzione a variazione limitata è la differenza di due funzioni monotone crescenti, e viceversa (sd). Le funzioni assolutamente continue in $[a, b]$ sono a variazione limitata (sd). Le funzioni assolutamente continue in $[a, b]$ sono esattamente quelle della forma $F(x) = F(a) + \int_{[a,x]} f(t)dt$ con f integrabile secondo Lebesgue (sd). Si ha: $F'(x) = f(x)$ q.o (sd)

Spazi con prodotto scalare a valori reali e complessi. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Norma associata. Spazio di Hilbert. Esempi: $\ell^2(\mathbb{N})$, $\ell^2(I)$, $L^2(\mu)$ rispetto a una misura μ (sd). Esercizio: Mostrare che lo spazio delle funzioni f assolutamente continue in $[0, 1]$ tali che $f(0) = 0$ e $f' \in L^2([0,1])$ con il prodotto scalare $\langle f, g \rangle = \int_{[0,1]} f'(x)g'(x)dx$ è uno spazio di Hilbert.

Bibliografia: I dettagli della prima parte sono facoltativi e si possono vedere su un testo di analisi reale, per es. Berberian: Fundamentals of real analysis, cap. 5; oppure file allegati. In resto si trova nel libro di Conway: A course in functional analysis, cap 1.

11 marzo Identità del parallelogramma in uno spazio di Hilbert. Caratterizzazione degli spazi di Hilbert tra gli spazi di Banach (sd). Teorema della proiezione su un convesso chiuso. Caso di un sottospazio chiuso. Proprietà di ortogonalità. Operatore di proiezione ortogonale. Involuntività del passaggio al complemento ortogonale per un sottospazio chiuso. Caso di un sottospazio non chiuso. Funzionali lineari e limitati. Norma di un funzionale e definizioni equivalenti. Caratterizzazione della limitatezza. Teorema di rappresentazione di Riesz. Caso di $L^2(\mu)$. Sottoinsiemi ortonormali di uno spazio di Hilbert. Base ortonormale e sua esistenza. Successini generalizzate in uno spazio topologico e nozione di convergenza. Somme infinite di vettori su un insieme possibilmente non numerabile. Confronto con la nozione di serie nel caso di insieme numerabile (Esercizio). Sviluppo di un

vettore rispetto a una base ortonormale. Teorema sulle varie caratterizzazioni della nozione di base ortonormale (da finire). Per la dimostrazione: a) Estendibilità di una funzione uniformemente continua su un sottinsieme denso di uno spazio metrico; b) Struttura di spazio di Hilbert per $\ell^2(A)$, base ortonormale canonica e verifica dello sviluppo nella base in questo esempio.

Bibliografia: Conway, cap 1. Per la caratterizzazione di spazio di Hilbert mediante l'identità del parallelogramma, vedere Yosida: Functional analysis.

13 marzo Esercizio sulla struttura di spazio di Hilbert di $\ell^2(A)$ rispetto ad un insieme A arbitrario, base ortonormale e sviluppo in serie rispetto ad essa. Dimostrazione del teorema di caratterizzazione delle basi ortonormali in uno spazio di Hilbert generale. Uguaglianza di Parseval. Disuguaglianza di Bessel. Isometrie e unitari tra spazi di Hilbert. Invarianza della cardinalità di una base ortonormale. Esempio della serie di Fourier in $L^2[0, 2\pi]$. Lemma di Riemann-Lebesgue. Dimensione Hilbertiana. Teorema classico di Weierstrass e generalizzazione di Stone (da finire). Formulazione complessa e sua derivazione dal caso reale. Derivazione della densità dell'algebra dei polinomi trigonometrici reali e complessi nella topologia della convergenza uniforme nell'algebra delle funzioni continue e periodiche. Densità dei polinomi trigonometrici in $L^2[0, 2\pi]$. Massimalità del sistema ortonormale canonico.

Bibliografia: Conway, cap. 1. Vedere anche le dispense di Doplicher parte I.

18 marzo Completamento della dimostrazione del teorema di Stone-Weierstrass per spazi topologici compatti (di Hausdorff). Descrizione della chiusura topologica di un sottoinsieme di uno spazio topologico in termini di net. Equivalenza con la chiusura sequenziale per spazi che verificano il primo assioma di numerabilità (ogni punto ha una base numerabile di intorno). Compattezza topologica e formulazioni equivalenti. Successione generalizzata estratta. Punto limite di una successione generalizzata e relazione con l'esistenza di net estratti convergenti. Caso delle successioni ordinarie in spazi topologici che verificano il primo assioma di numerabilità. Equivalenza tra compattezza di uno spazio topologico e l'esistenza di punti limite per i net. Spazio topologico prodotto e topologia prodotto. Convergenza dei net in questa topologia (esercizio). Teorema di Tychonoff (sd). Metrizzabilità del prodotto numerabile di spazi metrici. Non metrizzabilità di un prodotto più che numerabile (esercizio). Relazione tra l'esistenza di una base numerabile per gli aperti e la separabilità in uno spazio topologico, equivalenza in uno spazio metrico.

Bibliografia: Dispense di Doplicher parte I. Per i net, si può anche vedere l'articolo allegato. Osservate che lì la nozione di successione generalizzata estratta è diversa da quella da me data a lezione, ma altrettanto libera rispetto al net originario, e si dimostra funzionare altrettanto bene. (In accordo con l'osservazione di Valerio Proietti, che ringrazio.)

20 marzo Caratterizzazione della continuità di una funzione tra spazi topologici tramite net. Due topologie di Hausdorff su un insieme sono equivalenti se e solo se hanno gli stessi net convergenti. Equivalenza tra separabilità e secondo assioma di numerabilità in uno spazio metrico. Separabilità degli spazi metrici compatti.

Mettrizzabilità di uno spazio topologico normale a base numerabile (sd). Normalità di uno spazio compatto di Hausdorff. Mettrizzabilità di uno spazio topologico compatto di Hausdorff a base numerabile (sd). Completezza e totale limitatezza di uno spazio metrico compatto. Equivalenza per uno spazio metrico tra compattezza, compattezza sequenziale e totale limitatezza insieme con la completezza (sd). Separabilità dello spazio delle funzioni continue su un metrico compatto. Spazi topologici localmente compatti. Compattificazione ad un punto. Estensione del teorema di Stone-Weierstrass agli spazi localmente compatti. Completezza: Teorema di Baire (da finire). Densità delle funzioni mai derivabili nello spazio delle funzioni continue in $[0, 1]$ (esercizio).

Bibliografia: Dispense di Doplicher parte I; libro di Pedersen: Analysis Now, capitolo 1.

25 marzo Dimostrazione del teorema di Baire. Esempi di spazi di Banach. Algebre normate e di Banach. Esempi. Operatori lineari e limitati tra spazi di Banach, definizioni equivalenti e calcolo della norma. Relazione tra norme che inducono la stessa topologia. Operatore di moltiplicazione su uno spazio $L^p(X, \mu)$. Spazio normato quoziente, continuità della mappa quoziente. Quoziente di uno spazio di Banach. Tutte le norme su uno spazio di dimensione finita sono equivalenti (da finire). Teorema dell'applicazione aperta.

Bibliografia: Conway; dispense di Doplicher parte II.

27 marzo Ogni spazio normato di dimensione finita è completo e topologicamente isomorfo a \mathbb{C}^n . Alcune conseguenze del teorema dell'applicazione aperta: Ogni operatore limitato biunivoco tra spazi di Banach ha inverso limitato; due norme su uno spazio normato che lo rendono di Banach o sono inconfrontabili oppure equivalenti; un operatore limitato iniettivo tra spazi di Banach ha inverso continuo sull'immagine se e solo se è a codominio chiuso. Esercizio sugli operatori di moltiplicazione in $\ell^2(\mathbb{N})$. Importanza della completezza del dominio e immagine nel teorema dell'applicazione aperta. La mappa quoziente di uno spazio normato è sempre aperta. Operatore su uno spazio quoziente indotto da un operatore limitato tra spazi normati e invarianza della norma. Isomorfismo topologico tra uno spazio di Banach Y e il quoziente di un altro spazio di Banach X in presenza di un operatore limitato suriettivo $X \rightarrow Y$. Realizzazione di ogni spazio di Banach separabile di dimensione infinita come quoziente di $\ell^1(\mathbb{N})$ a meno di isomorfismo topologico. Teorema del grafico chiuso. Illimitatezza dell'operatore di derivazione densamente definito in $C[0, 1]$. Proprietà di grafico chiuso per esso. Importanza delle ipotesi di completezza nel teorema del grafico chiuso.

Bibliografia: Conway; Pedersen; dispense di Doplicher parte II.

1 aprile Alcuni esercizi sugli spazi normati di dimensione finita. Teorema dell'uniforme limitatezza. Caso dei net di operatori limitati puntualmente convergenti e puntualmente limitati. Applicazioni alla convergenza puntuale e uniforme delle serie di Fourier. Richiami dei risultati elementari. Esistenza di funzioni continue con serie di Fourier che non converge uniformemente. Enunciati dei teoremi di Kolmogorov e di Carleson sulla convergenza puntuale delle serie di Fourier. Funzionali

lineari e limitati su uno spazio normato. Spazio di Banach duale. Esempi di duali con gli spazi L^p . Enunciato del teorema di Riesz per funzionali lineari e positivi sull'algebra $C_{00}(X)$. Caso dei funzionali limitati e positivi. Estensione ai funzionali limitati complessi. Misura variazione norma di una misura complessa, spazio di Banach delle misure (cenni). Funzionale di Minkowski. Teorema di Hahn-Banach.

Bibliografia: Conway; Pedersen; dispense di Doplicher parte II.

3 aprile Alcune conseguenze del teorema di Hahn-Banach: I vettori non nulli possono essere separati dallo 0 tramite funzionali limitati. Immersione canonica di uno spazio normato nel biduale. Proprietà di isometria. Realizzazione del completamento nel biduale. Spazio di Banach riflessivo. Realizzazione dell'immersione canonica per gli spazi L^p . Non riflessività di ℓ^1 . Esercizio: uno spazio di Banach è riflessivo se e solo se il suo duale lo è. Esercizio: non riflessività di ℓ^∞ , c_0 , L^1 , L^∞ e C_0 su spazi infiniti. In uno spazio normato i sottospazi chiusi possono essere separati dai punti tramite funzionali limitati. Duali di sottospazi chiusi e di quozienti.

Somma diretta di spazi normati. Realizzazione di uno spazio normato come somma diretta. Sottospazi algebricamente complementari e topologicamente complementari. Caso degli spazi di Hilbert. Non unicità di un complemento algebrico. Enunciato del teorema di Murray sulla non esistenza di un complemento topologico per gli spazi ℓ^p , $p \neq 2$. Caratterizzazione dei complementari topologici in termini di continuità della proiezione. Complementari algebrici chiusi in uno spazio di Banach sono complementari topologici. Esistenza di un complementare topologico nel caso di un sottospazio chiuso di codimensione o dimensione finita. La somma di un sottospazio chiuso e di uno di dimensione finita in uno spazio di Banach è chiuso.

Bibliografia: Conway; Pedersen; dispense di Doplicher parte II.

8 aprile Spazi vettoriali topologici e prime proprietà. Intorni equilibrati. Spazi vettoriali localmente convessi. Famiglie separanti di seminorme e struttura associata di SVLC. Nozione di spazio di Fréchet. Esempi: Funzioni continue su uno spazio localmente compatto di Hausdorff con le seminorme della convergenza uniforme sui compatti. Funzioni analitiche su un aperto connesso del piano complesso con convergenza analoga. Funzioni infinitamente derivabili in un intervallo chiuso e limitato. Funzioni di classe C^k su un aperto di \mathbb{R}^n . Topologia debole $\sigma(X, X^*)$ di uno spazio normato X e topologia $*$ -debole $\sigma(X^*, X)$ del duale. Funzionale di Minkowski associato ad un intorno aperto convesso di 0. Proprietà di seminorma nel caso di intorni equilibrati. Caratterizzazione degli spazi localmente convessi come spazi seminormati. Caratterizzazione della metrizzabilità mediante il primo assioma di numerabilità. Esempi di spazi di Fréchet.

Bibliografia: Conway; Doplicher parte I.

10 aprile Caratterizzazione della continuità di una seminorma in uno spazio seminormato; caratterizzazione della continuità di un funzionale lineare. Duale dello spazio delle funzioni continue su uno spazio topologico localmente compatto. Spazi vettoriali in dualità non degeneri. Struttura associata di SVLC. Caratterizzazione

dei funzionali continui. Funzionali debolmente e $*$ -debolmente continui associati ad uno spazio normato. La topologia debole e quella originaria hanno gli stessi funzionali continui. La topologia $*$ -debole ha meno funzionali continui di quella della norma per spazi di Banach non riflessivi. Forma geometrica del teorema di Hahn-Banach. Polare di un sottinsieme di uno SVLC e proprietà principali. Teorema del bipolare. La topologia originaria e quella debole hanno gli stessi convessi chiusi (da finire).

Bibliografia: Doplcher parte I; Conway.

15 aprile Completamento della dimostrazione del teorema del bipolare. Topologie deboli e $*$ -deboli negli spazi L^p e in c_0 , ℓ^1 , ℓ^∞ . Teorema di compattezza di Alaoglu; caso degli spazi di Banach separabili: metrizzabilità del disco unitario nel duale. Compattezza debole del disco unitario di uno spazio di Banach riflessivo. Metrizzabilità debole del disco unitario di uno spazio di Banach non riflessivo con duale separabile. Densità $*$ -debole nel bidual di uno spazio di Banach non riflessivo con l'immersione canonica. Restrizione della topologia $*$ -debole. Teorema di densità del disco unitario di uno spazio di Banach nel disco unitario del bidual rispetto la topologia $*$ -debole. Equivalenza per uno spazio di Banach tra debole compattezza del suo disco unitario, riflessività, eguaglianza tra topologie debole e $*$ -debole sul duale; riflessività del duale.

Bibliografia: Conway.

29 aprile Esercizio: uno spazio normato con duale separabile è separabile. Corollario: In uno spazio di Banach separabile e riflessivo, il disco unitario è debolmente compatto e metrizzabile. Successioni debolmente di Cauchy in uno spazio di Banach. Completezza debole sequenziale. Uno spazio di Banach riflessivo è debolmente sequenzialmente completo. Esempi illustrativi negli spazi L^p e $C([0, 1])$. Una inversione del teorema di Alaoglu sequenziale: se il disco unitario del duale di uno spazio di Banach è $*$ -debolmente metrizzabile allora lo spazio di Banach è necessariamente separabile. Le successioni ordinarie di ℓ^1 che convergono debolmente, convergono anche in norma (s.d.), segue che il disco unitario di ℓ^1 non può essere debolmente metrizzabile. Teorema di Krein-Smulian sulla chiusura $*$ -debole dei convessi (s.d.), caso dei sottospazi. Equivalenza nel duale di uno spazio di Banach separabile tra chiusura $*$ -debole di un convesso e chiusura $*$ -debole sequenziale. Teorema di Eberlein-Smulian sulla equivalenza tra relativa compattezza debole e relativa compattezza sequenziale debole (s.d.)

Convesso di uno spazio vettoriale, punto estremo, faccia convessa. Esempi negli spazi euclidei di esistenza e ricchezza dei punti estremali. Esercizio sulla localizzazione dei punti estremali del disco unitario di uno spazio normato. Caso degli spazi $L^1([0, 1])$, $L^p([0, 1])$ e $L^\infty([0, 1])$. Teorema di Krein-Milman in uno spazio vettoriale localmente convesso.

Bibliografia: Conway; Dispense di Doplcher parte I.

13 maggio Stati dell'algebra delle funzioni continue su un compatto. Caratterizzazione degli stati. Compattezza $*$ -debole dello spazio degli stati. Caratterizzazione degli stati estremali come misure di Dirac, o come funzionali moltiplicativi.

Teoremi di punto fisso, richiami sul teorema delle contrazioni negli spazi metrici e sul teorema di Brouwer negli spazi normati di dimensione finita. Teorema di punto fisso di Schauder, e di Markov-Kakutani.

Bibliografia: Per la prima parte, vedere Pedersen. Per la seconda, Conway e dispense di Doplicher parte I.

15 maggio Aggiunto di un operatore limitato tra spazi normati e proprietà di base. Esempi con gli operatori di moltiplicazione sugli spazi L^p e gli operatori di shift su ℓ^1 . Relazione tra nucleo e immagine di un operatore e il suo aggiunto. Invertibilità dell'aggiunto di un operatore limitato invertibile. Caso degli spazi di Hilbert. Proprietà C^* della norma. Caratterizzazione degli operatori isometrici, unitari e di proiezione tramite l'aggiunto. Operatori autoaggiunti e loro caratterizzazione per spazi di Hilbert complessi. Norma di un operatore autoaggiunto. Operatori positivi. Relazione di ordine tra gli operatori autoaggiunti e proprietà di base. Teorema di esistenza e unicità della radice quadrata di un operatore positivo.

Bibliografia: Pedersen, Conway, Reed-Simon.

20 maggio Ancora sulle proprietà dell'aggiunto in $\mathcal{B}(H)$. Definizione astratta di C^* -algebra. Esempi: $\mathcal{B}(H)$ e C^* -algebre commutative. Operatori unitari. Modulo di un operatore. Isometrie parziali e loro caratterizzazione. Decomposizione polare, esistenza e unicità. Esercizio con gli operatori di shift e di moltiplicazione. Caratterizzazione dell'invertibilità di un operatore. Caso degli operatori positivi. Equivalenza tra l'invertibilità di un operatore positivo, della sua radice quadrata e dell'esistenza di una minorazione scalare positiva. Forme sesquilineari limitate, operatori associati. Esempio in ℓ^2 di operatore iniettivo positivo a codominio denso con inverso illimitato. Forme hermitiane, positive e strettamente positive. Teorema di Lax-Milgram. Operatori compatti tra spazi di Banach e proprietà di base.

Bibliografia: Reed-Simon; Pedersen; Conway; Dispense di Doplicher parte II.

22 maggio Gli operatori compatti su uno spazio di Banach formano un ideale bilatero chiuso in norma. Esempi: operatori nucleari tra spazi di Banach; operatori integrali su $C([0, 1])$, operatori integrali di Hilbert-Schmidt. Teorema di Schauder in spazi di Banach sulla relazione tra la compattezza di un operatore e il suo aggiunto. Spettro e spettro puntuale di un operatore tra spazi di Banach. Relazione tra lo spettro di un operatore e del suo aggiunto, in spazi di Banach. Teorema di Riesz-Schauder sulle proprietà spettrali degli operatori compatti tra spazi di Banach. Conseguenze: i teoremi dell'alternativa di Fredholm sulle soluzioni di un'equazione agli autovalori per un operatore compatto, omogenea e non, in spazi di Banach. Omessa la prova di $\dim \ker(A - \lambda) = \dim \ker(A^* - \lambda)$.

Bibliografia: Pedersen, Conway, dispense di Doplicher parte II.

27 maggio Completamento della dimostrazione del teorema di Riesz-Schauder. Numerabilità dello spettro di un operatore compatto e sue proprietà topologiche. Risolvente e spettro di un elemento di un'algebra di Banach complessa con identità. Spettro puntuale, continuo e residuo di un operatore limitato su spazio di

Banach. Esempi tramite operatori di moltiplicazione, lo shift su ℓ^1 e il suo aggiunto. Limitatezza dello spettro. Raggio spettrale. Calcolo del raggio spettrale per un operatore autoaggiunto su spazio di Hilbert, o più in generale per un elemento normale di una C^* -algebra (da finire). Teorema spettrale per operatori compatti autoaggiunti su spazio di Hilbert. Applicazione: Cenni ai sistemi di Sturm-Liouville e al metodo della funzione di Green. Esercizio: L'insieme degli elementi invertibili di un'algebra di Banach è aperto in norma. Lo spettro di un elemento dell'algebra è un compatto del piano complesso. Enunciato del teorema sulla nontrivialità dello spettro in ambito di algebre di Banach e calcolo del raggio spettrale.

Bibliografia: per gli operatori compatti su spazio di Banach: Dispense di Doplicher parte II; per lo spettro: Reed-Simon vol. 1. Per i sistemi di Sturm-Liouville: Conway; Dunford-Schwartz: Linear Operators.

29 maggio Esercizio sullo spettro di una funzione continua nell'algebra delle funzioni continue su un compatto. Funzione risolvente di un elemento di un'algebra di Banach complessa e sviluppabilità in serie di potenze in un intorno di ogni punto dell'insieme risolvente. Sviluppabilità all'infinito (serie di Neumann). Analiticità forte e debole di una funzione di variabile complessa a valori in uno spazio di Banach e loro equivalenza. Teorema di Liouville per funzioni di variabile complessa a valori in uno spazio di Banach. Analiticità della funzione risolvente. Non trivialità dello spettro di un elemento. Formula del raggio spettrale. Calcolo del raggio spettrale di elementi normali di una C^* -algebra. Proprietà dello spettro di operatori autoaggiunti, positivi e positivi invertibili su spazio di Hilbert. Trivialità dello spettro residuo per operatori autoaggiunti.

Bibliografia: Reed-Simon vol. 1. Vedere anche dispense di Doplicher, parte II.

3 giugno Spettro di operatori unitari. Spettro dell'inverso. Calcolo funzionale continuo per un operatore limitato autoaggiunto: spettro di un polinomio di un elemento di un'algebra di Banach con I. Norma di un polinomio di un operatore normale. Esistenza e unicità del calcolo funzionale continuo. Proprietà principali: l'immagine è una C^* -sottoalgebra commutativa di $\mathcal{B}(H)$; relazione tra lo spettro di un operatore e lo spettro di un suo calcolo funzionale continuo (teorema della mappa spettrale); Caratterizzazione degli operatori positivi tra quelli normali mediante lo spettro; Esercizio sulla norma della funzione risolvente. Misure spettrali. Funzioni boreliane della retta. Funzioni di Baire di classe 1. Algebra delle funzioni boreliane limitate proprietà di minimalità rispetto i limiti puntuali di successioni limitate di funzioni continue (sd). Teorema sull'estensione del calcolo funzionale boreliano (da finire). Topologia forte, debole, ultraforte e ultradebole in $\mathcal{B}(H)$. Proprietà principali rispetto l'aggiunto e il prodotto di operatori.

Bibliografia: Reed-Simon vol 1. Si può completare la parte sulle funzioni di Baire, Borel e la relazione con il c.f.b. mediante il materiale allegato alla pagina del corso.

5 giugno Proprietà principali delle funzioni di boreliane e di Baire in relazione ai limiti di funzioni continue. Ancora sul calcolo funzionale continuo, Teorema

di esistenza e unicità del c.f.b. Dimostrazione su spazio di Hilbert separabile. Teorema di Dixmier sull'estensione L^∞ del c.f.b. (s.d.). Teorema del bicommutante di von Neumann (s.d.). Definizione di algebra di von Neumann. Immagine dell'isomorfismo di Dixmier (s.d.). Teorema spettrale per operatori autoaggiunti senza molteplicità.

Gruppo topologico e gruppo localmente compatto. Esistenza e unicità della misura di Haar invariante a sinistra (s.d.). Funzione modulare. Esempi di gruppi unimodulari. Algebra di Banach $L^1(G)$ associata al gruppo localmente compatto G . Caratterizzazione delle algebre commutative (s.d.)

Bibliografia: prima parte: Reed-Simon; Dispense di Doplicher parte I; appunti del corso. Seconda parte: dispensa sulla pagina del corso, relativa alla misura di Haar, appunti del corso. Per chi volesse approfondire: Hewitt-Ross: Abstract harmonic analysis vol 1. Pedersen: C^* -algebras and their automorphism groups.

10 giugno Ancora su $L^1(G)$: funzione modulare; caso dei gruppi discreti; involuzione e struttura di $*$ -algebra di Banach su $L^1(G)$. $L^1(G)$ ha identità se e solo se G è discreto; è commutativa se e solo se G lo è (s.d.). C^* -algebra involupante di un gruppo localmente compatto (cenni).

Algebra di Banach quoziente tramite un ideale bilatero chiuso. Esempio sulle algebre $C(K)$; ideale J_F indotto da un chiuso F di K . $*$ -isomorfismo isometrico e suriettivo tra $C(K)/J_F$ e $C(F)$. Corollario: teorema di estensione di Tietze per spazi compatti.

Algebre di Banach complesse con identità: teorema di Mazur. Ideali massimali, loro chiusura e relazione con gli ideali propri. Algebre commutative: relazione tra la non invertibilità di un elemento e gli ideali massimali e tra gli ideali massimali e i nuclei degli omomorfismi non banali dell'algebra nei complessi (caratteri dell'algebra). Spettro dell'algebra. Relazione tra lo spettro dell'algebra e lo spettro di un suo elemento. Continuità automatica dei caratteri. Topologia di spazio compatto di Hausdorff sullo spettro dell'algebra. Trasformata di Gelfand. Radicale dell'algebra. Caso delle C^* -algebre commutative con identità. Teorema di Gelfand-Naimark (da finire).

Bibliografia: Per $L^1(G)$ si può vedere Conway. Per maggior completezza: Hewitt-Ross: Abstract harmonic analysis; per $C^*(G)$, Pedersen: C^* -algebras and their automorphism groups. Per il resto: Conway; dispense di Doplicher parte II.

11 giugno Lo spettro di un elemento autoaggiunto di una C^* -algebra è reale. Automatica involutività di un carattere di una C^* -algebra commutativa con identità. Dimostrazione del teorema di Gelfand-Naimark. Calcolo dello spettro per $C(K)$, per un'algebra di Banach con identità generata da un solo elemento, e per una C^* -algebra con identità generata da un elemento normale. Invarianza dello spettro di un elemento dalla C^* -algebra che lo contiene (sd). Conseguenze del teorema di GN: Calcolo funzionale continuo per un operatore normale su spazio di Hilbert. Estensione al calcolo funzionale boreliano. Relazione tra omomorfismi tra C^* -algebre commutative con identità e funzioni continue tra i relativi spettri. Caso degli isomorfismi suriettivi. Automatica continuità e involutività di un omomorfismo tra C^* -algebre commutative con identità. Automatica continuità

di uno $*$ -omomorfismo tra C^* -algebre unitali. Gli $*$ -omomorfismi iniettivi sono isometrici. Algebre di Banach prive di identità. Ideali modulari e modulari massimali. Spettro dell'algebra e relazione con gli ideali modulari massimali. Algebre di Banach con l'identità aggiunta. Struttura di spazio localmente compatto sullo spettro di un'algebra di Banach generale; trasformata di Gelfand e sue proprietà. Aggiunta dell'identità a una C^* -algebra.

Bibliografia: Conway; dispense di Doplicher parte II.

12 giugno Ancora sulla C^* -algebra con identità che contiene una data C^* -algebra. Teorema di Gelfand-Naimark per C^* -algebre commutative generali. Algebra $L^1(G)$ associata ad un gruppo localmente compatto commutativo. Cenni sulla caratterizzazione dello spettro, il gruppo dei caratteri \hat{G} , struttura topologica, dualità di Pontryagin, Trasformata di Fourier. Esempi di gruppi di caratteri per \mathbb{R} e \mathbb{T} .

Famiglia spettrale associata a un operatore limitato autoaggiunto su spazio di Hilbert. Integrale di Riemann-Stieltjes associato ad una famiglia spettrale. Teorema spettrale.

Bibliografia: Per la prima parte: Loomis: Introduction to abstract harmonic analysis. Per la seconda: Conway; dispense di Doplicher parte II.