UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI ROMA
Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

S. DOPLICHER

Appunti del Corso di

ANALISI FUNZIONALE

Parte I^a

Istituto Matematico "G. Castelnuovo"
Anno Accademico 1974-75

I N D I C E

ueste note corrispondono "grosso modo" alle prime venti lezioni el corso 1974-75.

I. RICHIAMI DI TOPOLOGIA GENERALE

1.1 Notazioni

I simboli $\cup$ e $\cap$ denotano rispettivamente l'unione e la intersezione di insiemi; $P(X)$ denota l'insieme delle parti o sottoinsiemi dell'insieme X; se $\mathcal{E} \subset P(X)$

$$\cup \mathcal{E} \in P(X) \quad ; \quad \cap \mathcal{E} \in P(X)$$

denotano l'unione e rispettivamente l'intersezione dei sottoinsiemi di X appartenenti ad $\mathcal{E}$.

Il simbolo $\emptyset$ denota l'insieme vuoto.

Una funzione f dell'insieme X_1 sull'insieme X_2 è una corrispondenza che associa ad ogni $x \in X_1$ un elemento $f(x) \in X_2$; lo insieme

$$f(A) = \{ f(x) \ / \ x \in A \}$$

è l'immagine del sottoinsieme A di X_1; l'insieme

$$f^{-1}(B) = \{ x \in X \ / \ f(x) \in B \}$$

è la controimmagine del sottoinsieme B di X_2.

La funzione f è <u>iniettiva</u> se $f(x)=f(y) \Rightarrow x=y$; <u>surgettiva</u> $f(X_1) = X_2$.

Il simbolo $X_2^{X_1}$ denota l'insieme di tutte le funzioni di X_1 X_2.

Per ogni $\alpha \in A$ (insieme di indici) sia assegnato un insie- X_α ; l'<u>insieme prodotto</u>

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

er definizione il sottoinsieme di $\left(\bigcup_{\alpha \in A} X_\alpha\right)^A$ costituito dal funzioni f per cui $f(\alpha) \in X_\alpha$, $\alpha \in A$.

La <u>proiezione</u> p_β di $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ in X_β, $\beta \in A$, è definita da

$$p_\beta(f) = f(\beta) \quad , \quad f \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \ .$$

Il prodotto di una famiglia numerabile di insiemi $X_1, X_2, \ldots$ denota anche con il simbolo:

$$X_1 \times X_2 \times \ \ldots = \prod_{i \in N} X_i$$

suoi elementi: $(x_1, x_2, \ldots)$; $x_i \in X_i$.

1.2 <u>Insiemi parzialmente ordinati e Lemma di Zorn.</u>

Un insieme X munito della relazione binaria $a<b$ è <u>parzialmente ordinato</u> se

1. $\forall\, a \in X,\ a<a.$
2. $a<b,\ b<a \Rightarrow a = b.$
3. $a<b,\ b<c \Rightarrow a<c.$

<u>Esempio</u>: Sia Y un insieme qualunque; P(Y) munito della relazione "inclusione" è parzialmente ordinato.

Sia X parzialmente ordinato con la relazione $<$; $a_o \in X$ è <u>massimale</u> se $a_o < a,\ a \in X \Rightarrow a = a_o$.

Un insieme parzialmente ordinato è <u>diretto</u> se $\forall\, a,b \in X$, $\exists\, c \in X$ tale che

$$a<c, \quad b<c \ .$$

Un insieme parzialmente ordinato è <u>linearmente ordinato</u> se $\forall\, a,b \in X$

$$a<b \quad \text{oppure} \quad b<a \ .$$

Citiamo due forme equivalenti del <u>postulato delle scelte</u> della teoria degli insiemi:

1. <u>Sia</u> $A \neq \emptyset$ <u>un insieme di indici e</u> $\forall \alpha \in A$ <u>sia</u> X_α <u>un insieme non vuoto; allora</u>

$$\prod_{\alpha \in A} X_\alpha \neq \emptyset$$

2. <u>Sia</u> X <u>un insieme parzialmente ordinato</u>.
<u>Esiste</u> $L \subset X$ <u>linearmente ordinato massimale</u>.

Tale postulato permette di superare i limiti del metodo di induzione finita; ne faremo uso nella forma seguente, facile conseguenza di 2.:

(<u>Lemma di Zorn</u>) Sia X un insieme parzialmente ordinato tale che ogni sottoinsieme linearmente ordinato $L \subset X$ ammette un elemento maggiorante x_L in X (cioè $\forall x \in L$, $x < x_L$). Allora X possiede un elemento massimale.

1.3 <u>Spazi topologici</u>

Sia X un insieme. Una <u>topologia</u> o struttura topologica $\mathcal{T}$ su X consiste nella assegnazione di una famiglia $\mathcal{U}$ di sottoinsiemi di X, $\mathcal{U} \subset P(X)$, tale che valgano le proprietà seguenti:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{U}$.
2. $\mathcal{E} \subset \mathcal{U} \Rightarrow \bigcup \mathcal{E} \in \mathcal{U}$.
3. $U_1, U_2 \in \mathcal{U} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \mathcal{U}$.

Gli insiemi di $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathcal{T})$ sono dettigli *aperti* della topologia $\mathcal{T}$. In parole: unioni *arbitrarie* di aperti sono aperti; intersezioni *finite* di aperti sono aperti.

La coppia $(X, \mathcal{T})$ è uno *spazio topologico*.

Se $\mathcal{T}, \mathcal{T}'$ sono topologie su X diremo che $\mathcal{T}$ è *più debole* di $\mathcal{T}'$ scrivendo $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$, se $\mathcal{U}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{U}(\mathcal{T}')$. Con tale relazione, le topologie su X formano un insieme parzialmente ordinato Top(X).

La topologia *banale* $\mathcal{T}_o$ è definita dagli aperti $\{\emptyset, X\}$ e la topologia *discreta* $\mathcal{T}_d$ è definita dalla famiglia di aperti P(X); se $\mathcal{T} \in$ Top(X), è $\mathcal{T}_o < \mathcal{T} < \mathcal{T}_d$.

Se $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$ è un insieme di topologie su X, la famiglia $\bigcap_{\mathcal{T} \in \underset{\sim}{\mathcal{T}}} \mathcal{U}(\mathcal{T})$ di sottoinsiemi di X soddisfa 1., 2., 3. e definisce una topologia su X denotata inf $\underset{\sim}{\mathcal{T}}$.

Se $\mathcal{E} \subset$ P(X) è una famiglia arbitraria di insiemi,

$$\inf \{\mathcal{T} \in \mathrm{Top}(X) \ / \ \mathcal{E} \subset \mathcal{U}(\mathcal{T})\}$$

la più debole delle topologie per cui gli insiemi di $\mathcal{E}$ sono aperti.

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico. Un sottoinsieme $\mathcal{B}$ di aperti per $\mathcal{T}$ è una <u>base</u> se ogni aperto è unione di una famiglia di elementi di $\mathcal{B}$.

Un sottoinsieme $\mathcal{E}$ di aperti per $\mathcal{T}$ è una <u>subbase</u> se le intersezioni finite di elementi di $\mathcal{E}$ formano una base di aperti per $\mathcal{T}$.

Se X è un insieme arbitrario ed $\mathcal{E} \subset P(X)$, la più debole delle topologie per cui gli insiemi di $\mathcal{E}$ sono aperti è l'unica topologia per cui $\mathcal{E}$ è una subbase di aperti.

Una topologia è detta a <u>base numerabile</u> se esiste una base numerabile di aperti; è equivalente che esista una subbase numerabile.

La topologia <u>abituale</u> di $\mathbb{R}^n$ è a base numerabile ed è definita indifferentemente dalla base $\mathcal{E}_1$ = tutti i parallelepipedi di aperti con vertici a coordinate razionali $\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n / a_i < x_i < b_i \}$; o dalla subbase: tutte le sfere aperte.

Se $(X, \mathcal{T})$ è uno spazio topologico e $E \subset X$,

$$\{ U \cap E \;/\; U \in \mathcal{U}(\mathcal{T}) \} \subset P(E)$$

definisce la topologia indotta $\mathcal{T}_E$ su E;$(E, \mathcal{T}_E)$ è un sottospazio di $(X,\mathcal{T})$.

Un intorno di $x \in X$ è un aperto contenente x. Una famiglia di intorni di x forma una base di intorni di x se ogni intorno di x contiene un intorno della famiglia.

Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T})$ è detto di Hausdorff se ogni coppia di punti x_1, x_2 distinti di X ammette intorni disgiunti:

$$\exists\, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 \in \mathcal{U}(\mathcal{T}) \;,\quad x_1 \in \mathcal{U}_1 \;,\quad x_2 \in \mathcal{U}_2 \;,\quad \mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = \emptyset .$$

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno spazio topologico; gli insiemi chiusi della topologia $\mathcal{T}$ sono per definizioni i complementari degli insiemi aperti: $\mathcal{F}(\mathcal{T}) = \{ \complement U \,/\, U \in \mathcal{U}(\mathcal{T}) \}$.

Gli assiomi che definiscono una topologia in termini di insiemi aperti $\mathcal{U}(\mathcal{T})$ sono evidentemente equivalenti ai seguenti assiomi per $\mathcal{F}(\mathcal{T})$:

1'. $\emptyset, X \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$

2'. $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}(\mathcal{T}) \Rightarrow \bigcap \mathcal{G} \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$.

3'. $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{T}) \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{T})$.

Se $M \subset X$ la chiusura $\overline{M}^{\mathcal{T}}$ di M nella topologia $\mathcal{T}$ è l'intersezione dei chiusi contenenti M; quindi $\overline{M}^{\mathcal{T}}$ è il più piccolo chiuso di $\mathcal{T}$ contenente M. $\complement\overline{M}^{\mathcal{T}}$ è il più grande aperto di $\mathcal{T}$ disgiunto da M. Segue che $x \in \overline{M}^{\mathcal{T}}$ se e solo se ogni intorno di x interseca M.

<u>Notare</u> che se $\mathcal{T}, \mathcal{T}' \in$ Top(X) le proprietà seguenti sono equivalenti tra loro:

1. $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$.
2. $\mathcal{F}(\mathcal{T}) \subset \mathcal{F}(\mathcal{T}')$.
3. $\forall M \subset X, \overline{M}^{\mathcal{T}} \supset \overline{M}^{\mathcal{T}'}$;
4. $\forall x \in X$, ogni $\mathcal{T}$-intorno di x contiene un $\mathcal{T}'$-intorno di x.

Quando non vi sarà possibilità di equivoco su quale sarà la topologia $\mathcal{T}$ in questione, scriveremo X, $\mathcal{U}$, $\mathcal{F}$, $\overline{M}$ per uno spazio topologico X, le famiglie di aperti e di chiusi e la chiusura di $M \subset X$ definite dalla topologia $\mathcal{T}$.

L'insieme M è <u>denso</u> se $\overline{M} = X$.

L'<u>interno</u> $\mathring{M}$ di un insieme M è l'unione degli aperti contenuti in M; $\mathring{M}$ è il più grande aperto contenuto in M e

$$\complement\mathring{M} = \overline{\complement M} .$$

La <u>frontiera</u> di M è l'insieme differenza

$\overline{M} \setminus \mathring{M}$.

Le seguenti proprietà di un sottoinsieme $M \subset X$ sono evidentemente equivalenti:

(i) $\mathring{\overline{M}} = \emptyset$ (la chiusura è priva di punti interni);

(ii) $C\overline{M}$ è denso;

(iii) $\overline{M}$ = frontiera di $\overline{M}$.

Se M soddisfa tali condizioni è detto *raro*; uno *spazio topologico* è detto di *I^a categoria* se è l'unione di una famiglia numerabile di sottoinsiemi rari.

In uno spazio di *Hausdorff* ogni punto è un sottoinsieme *chiuso*.

Una successione generalizzata è definita da un insieme di indici A parzialmente ordinato diretto e da una applicazione $\alpha \in A \to x_\alpha \in X$ di A in X.

Si dice che $\{x_\alpha / \alpha \in A\}$ è *convergente* se esiste $x \in X$ tale che, per ogni intorno W di x, esiste $\alpha_W \in A$ con la proprietà: $x_\alpha \in W$ se $\alpha > \alpha_W$; si scriverà in tal caso $x = \lim_\alpha x_\alpha$ e si dirà che $\{x_\alpha / \alpha \in A\}$ converge ad x, ed x è limite di $\{x_\alpha / \alpha \in A\}$.

Se X è uno spazio di Hausdorff, ogni successione convergente ha un limite unico. Se $x = \lim_{\alpha} x_{\alpha}$ è $x \in \overline{\{x_{\alpha} / \alpha \in A\}}$. Sia $M \subset X$ un insieme e $x \in \overline{M}$; per ogni intorno W di x esiste $x_W \in W \cap M$. L'insieme degli intorni di x munito della relazione $W < W'$ se $W \supset W'$ è parzialmente ordinato diretto e

$$x = \lim_{W} x_W .$$

Ogni punto di $\overline{M}$ è limite di una successione generalizzata di elementi di M. Limitandosi a successioni ordinarie e convergenti si otterebbe la <u>chiusura per successioni</u> di M. La chiusura per successioni coincide con la chiusura se ogni punto di X ammette una base numerabile di intorni.

Si dirà che x è un <u>punto limite</u> di $\{x_{\alpha} / \alpha \in A\}$ se per ogni intorno W di x ed ogni $\alpha \in A$, $\exists \alpha_W \in A$, $\alpha_W > \alpha$ tale che $x_{\alpha_W} \in W$. L'insieme dei punti limite di una successione gen. è <u>chiuso</u>.

Sia $\{x_{\alpha} / \alpha \in A\}$ una successione gen., B un insieme parzialmente ordinato diretto ed f una funzione di B in A tale che

$$\forall \alpha_0 \in A, \exists \beta_0 \in B : \beta > \beta_0 \Rightarrow f(\beta) > \alpha_0 .$$

Diremo che $\{x_{f(\beta)} \,/\, \beta \in B\}$ è una sottosuccessione generalizzata di $\{x_\alpha \,/\, \alpha \in A\}$.

Sia x un punto limite della successione $\{x_\alpha \,/\, \alpha \in A\}$ nello spazio topologico X, e W(X) una base di intorni di x. Sia B l'insieme $A \times W(X)$; munito della relazione

$$(\alpha, W) > (\alpha', W') \quad \text{se} \quad \alpha > \alpha', \; W \subset W'$$

B è parzialmente ordinato diretto. Per ogni $\beta = (\alpha, W) \in B$ sia $f(\beta) \in A$ tale che $f(\beta) > \alpha$, $x_{f(\beta)} \in W$. Allora $\{x_{f(\beta)} / \beta \in B\}$ è una sottosuccessione gen. convergenete ad x.

Dunque: una successione gen. in uno spazio topologico ammette sottosuccessioni gen. convergenti se e solo se l'insieme dei suoi punti limite è non vuoto.

Attenzione. Se nessun punto di X ammette una base numerabile di intorni, può accadere che $\{x_n ; n \in N\}$ sia densa in X ma nessuna sottosuccessione ordinaria è convergente.

1.4 Funzioni continue; Topologie deboli e prodotto.

Siano $(X_1, \mathcal{T}_1)$ ed $(X_2, \mathcal{T}_2)$ spazi topologici. Una funzione f di X_1 in X_2 è continua se le controimmagini degli aperti sono aperti:

$$f^{-1}(\mathcal{U}(\mathcal{T}_2)) \subset \mathcal{U}(\mathcal{T}_1) .$$

La funzione f è <u>aperta</u> se le immagini degli aperti sono aperti

$$f(\mathcal{U}(\mathcal{T}_1)) \subset \mathcal{U}(\mathcal{T}_2).$$

Se f è una funzione iniettiva di X_1 <u>su</u> X_2 ($f(X_1)=X_2$) evidentemente f è aperta $\Leftrightarrow$ f^{-1} è continua.

Una funzione continua f di X_1 su X_2 dotata di inverso continuo è un <u>omeomorfismo</u>; in altre parole f è un omeomorfismo se è biunivoca surgettiva e

$$f(\mathcal{U}(\mathcal{T}_1)) = \mathcal{U}(\mathcal{T}_2) .$$

<u>Osservazione</u> Ogni funzione continua da $(X_1, \mathcal{T}_1)$ ad $(X_2, \mathcal{T}_2)$ è anche continua da $(X_1, \mathcal{T}_1')$ a $(X_2, \mathcal{T}_2')$ se

$$\mathcal{T}_2' < \mathcal{T}_2 \quad ; \quad \mathcal{T}_1' > \mathcal{T}_1 \quad .$$

Sia X un insieme, A un insieme di indici e, per ogni $\alpha \in A$, sia $(X_\alpha , \mathcal{T}_\alpha)$ uno spazio topologico e f_α una funzione di X in X_α .

La <u>topologia debole</u> $\mathcal{T}$ su X definita dalle funzioni $\{f_\alpha ; \alpha \in A\}$ è la più debole delle topologie $\mathcal{T}'$ per cui $f_\alpha : (X, \mathcal{T}') \Rightarrow (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ è continua per ogni $\alpha \in A$. La topologia $\mathcal{T}$ è definita dalla subbase di aperti $\bigcup_{\alpha \in A} f_\alpha^{-1}(\mathcal{U}(\mathcal{T}_\alpha))$.

Una classe importante di topologie deboli è data dalle topologie prodotto. Siano $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$, $\alpha \in A$, spazi topologici, ed X l'insieme prodotto

$$X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$$

La topologia debole $\mathcal{T}$ su X definita dalle proiezioni $\{p_\alpha ; \alpha \in A\}$ è detta topologia prodotto e

$$(X, \mathcal{T}) = \prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$$

è detto lo <u>spazio topologico prodotto</u> (di Tychonov).

Una successione generalizzata $\{x_\iota ; \iota \in I\}$ in X è convergenete ad x se e solo se, per ogni $\alpha \in A$, la successione generalizzata delle proiezioni $\{p_\alpha(x_\iota) ; \iota \in I\}$ è convergente a $p_\alpha(x)$ (nessuna uniformità in α !).

Sia W un intorno di un punto $x \in X$ per la topologia $\mathcal{T}$;

la condizione $y \in W$ pone restrizioni solo su un numero <u>finito</u> di proiezioni $p_{\alpha_1}(y),\dots,p_{\alpha_n}(y)$; un tale intorno è definito, per esempio, assegnando un sottoinsieme finito $A' \subset A$ e, per ogni $\alpha \in A'$, un intorno U_α di $p_\alpha(x)$, mediante le condizioni

$$y \in W \quad \text{se} \quad p_\alpha(y) \in U_\alpha \ , \quad \alpha \in A' .$$

Al variare di A' e di $\alpha \in A' \to U_\alpha$ come sopra si ottiene una <u>base di intorni</u> di x per la topologia prodotto $\mathcal{T}$.

II. SPAZI COMPATTI.

2.1 Spazi topologici compatti.

Sia X un insieme ed $\mathcal{E} \subset P(X)$; diremo che $\mathcal{E}$ è un ricoprimento se $\cup \mathcal{E} = X$. Diremo che $\mathcal{E}$ ha la proprietà dell'intersezione finita (p.i.f.) se ogni sottofamiglia finita di insiemi appartenenti ad $\mathcal{E}$ ha intersezione non vuota.

Sia X uno spazio topologico ed $\mathcal{E}$ un ricoprimento; se gli insiemi della famiglia $\mathcal{E}$ sono tutti aperti diremo che $\mathcal{E}$ è un ricoprimento aperto.

Diremo che lo spazio topologico X è compatto se è soddisfatto uno degli assiomi seguenti, evidentemente equivalenti tra loro:

1. OGNI RICOPRIMENTO APERTO DI X CONTIENE UN RICOPRIMENTO FINITO.
2. OGNI FAMIGLIA DI CHIUSI DI X AVENTE INTERSEZIONE VUOTA CONTIENE UNA SOTTOFAMIGLIA FINITA AVENTE INTERSEZIONE VUOTA.
3. OGNI FAMIGLIA DI CHIUSI CON LA P.I.F. HA INTERSEZIONE NON VUOTA.

Sia X uno spazio compatto e $\{ x_\alpha / \alpha \in A \}$ una successione in X. I chiusi

$$F_{\alpha} = \overline{\{ x_{\alpha'} \,/\, \alpha' \in A,\ \alpha' \geq \alpha \}}$$

hanno la proprietà dell'intersezione finita poichè A è <u>diretto</u>. Quindi per la proprietà 3.

$$(2.1) \qquad \bigcap_{\alpha \in A} F_{\alpha} \neq \emptyset$$

L'insieme (2.1) coincide evidentemente con l'insieme dei <u>punti limite</u> di $\{x_{\alpha} / \alpha \in A\}$; quindi tale insieme è non vuoto ed esistono sottosuccessioni convergenti.

Sia $\mathcal{Y}$ una famiglia di chiusi con la p.i.f. nello spazio topologico X, $\underline{\mathfrak{G}}$ la collezione delle sottofamiglie finite di $\mathcal{Y}$, e, per ogni $\mathfrak{g} \in \underline{\mathfrak{G}}$, $x_{\mathfrak{g}} \in \bigcap \mathfrak{g}$. Se x è un punto limite della successione $\{x_{\mathfrak{g}} / \mathfrak{g} \in \underline{\mathfrak{G}}\}$, allora $x \in \bigcap \mathcal{Y}$. Abbiamo quindi che gli assiomi 1., 2., 3. degli spazi compatti sono anche tutti equivalenti a

4. OGNI SUCCESSIONE GENERALIZZATA IN X AMMETTE UNA SOTTOSUCCESSIONE GENERALIZZATA CONVERGENTE.

Un sottoinsieme F di uno spazio topologico X si dirà compatto se F munito della topologia indotta da X è uno spazio com patto. Un chiuso in uno spazio compatto è compatto.

E' noto dall'analisi elementare che i sottoinsiemi compatti di R^n muniti della topologia abituale sono precisamente gli insiemi chiusi e limitati.

Il teorema seguente fornisce una classe vastissima di esempi di spazi compatti.

2.1. <u>Teorema</u> (TYCHONOV)

SIA $(X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$ UNO SPAZIO COMPATTO PER OGNI $\alpha \in A$; ALLORA

$$\prod_{\alpha \in A} (X_\alpha, \mathcal{T}_\alpha)$$

E' COMPATTO.

<u>Dim.</u> Usiamo la forma 4. del postulato di compattezza. Sia $\{x_\iota; \iota \in I\}$ una succ. gen. in $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Costruiamo una sottosucc. gen. con la proprietà: l'insieme dei punti limite è vuoto oppure la sottosuccessione é convergente.

A questo scopo sia $E_\iota = \{x_{\iota'} / \iota' > \iota, \iota' \in I\}$; $\{E_\iota; \iota \in I\}$ ha la p.i.f. Per il lemma di Zorn esiste $\mathcal{G} \subset P(X)$ massimale con : p.i.f. e $\mathcal{G} \supset \{E_\iota; \iota \in I\}$. Se $\iota \in I$, $M \in \mathcal{G}$, $E_\iota \cap M \neq \emptyset$; sia $f(\iota,M) \in I$, $f(\iota,M) > \iota$ tale che $x_{f(\iota,M)} \in M$. Se $H = I \times \mathcal{G}$

è munito della relazione d'ordine parziale

$$(\iota, M) > (\iota', M') \quad \text{se} \quad \iota > \iota'; \quad M \subset M'$$

$\{x_{f(\eta)};\ \eta \in H\}$ è una sottosuccessione gen. di $\{x_\iota\ ;\ \iota \in I\}$; è facile riconoscere che la proprietà richiesta è verificata.

Poichè X_α è compatto esiste un punto limite x_α di

$$\{P_\alpha(x_{f(\eta)});\ \eta \in H\}. \tag{2.2}$$

Sia $x \in X$ definito da $P_\alpha(x) = x_\alpha$; $\alpha \in A$.
Dimostriamo che x è punto limite di $\{x_\iota;\ \iota \in I\}$. Sia A' un sottoinsieme finito di A, U_α un intorno di x_α , $\alpha \in A'$; $U^{(\alpha)}$ sia $P_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ e

$$U = \bigcap_{\alpha \in A'} U^{(\alpha)}.$$

Al variare di A' ed U_α c.s., U percorre una base di intorni di x in $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Basta quindi dimostrare che (definizione di punto limite)

$$E_\iota \cap U \neq \emptyset \quad \forall \iota \in I. \tag{2.3}$$

Ma basta dimostrare che se $\alpha \in A'$, $U^{(\alpha)} \in \mathcal{G}$; poichè $\mathcal{G}$ ha la p.i.f., ed $E_2 \in \mathcal{G}$. Basta quindi $M \cap U^{(\alpha)} \neq \emptyset$, $\alpha \in A'$, $M \in \mathcal{G}$, poichè $\mathcal{G}$ è massimale; cioè basta $p_\alpha(M) \cap U_\alpha \neq \emptyset$.

Ma x_α è un punto limite della succ. (2.2) e U_α è un intorno di x_α; quindi $\forall \zeta \in H$, $\eta = (\zeta, M)$, $\exists \eta' > \zeta$ tale che

$$p_\alpha (x_{f(\eta')}) \in U_\alpha \quad ;$$

quindi $p_\alpha(M) \cap U_\alpha \neq \emptyset$ e vale la (2.3). □

2.2. <u>Proposizione</u> OGNI SOTTOINSIEME COMPATTO K DI UNO SPAZIO DI HAUSDORFF X E' CHIUSO.

<u>Dim.</u> Sia $x \in \overline{K}$ ed $\{x_\alpha \,/\, \alpha \in A\} \subset K$ una succ. gen. convergente ad x in K (postulato 4.) e sia $x' \in K$ il suo limite; x ed x' sono entrambi il limite in X della sottosuccessione; poichè X è di Hausdorff, $x=x'$. □

2.3. <u>Proposizione</u> SIA K UNO SPAZIO COMPATTO ED f UNA FUNZIONE CONTINUA DI K NELLO SPAZIO TOPOLOGICO X; ALLORA f(K) E' COMPATTO IN X.

<u>Dim.</u> Sia $\mathcal{E}$ un ricoprimento aperto di $f(K)$; $\{f^{-1}(U) \,/\, U \in \mathcal{E}\}$ è un ricoprimento aperto di K; sia $f^{-1}(U_1),\dots,f^{-1}(U_n)$ un sottoricoprimento finito; allora $U_1,\dots,U_n$ è un ricoprimento fini

to di f(K) contenuto in $\mathcal{E}$. □

2.4. <u>Corollario</u> UNA FUNZIONE CONTINUA f DI UNO SPAZIO COMPATTO K A VALORI REALI AMMETTE UN MASSIMO ED UN MINIMO.

<u>Dim.</u> L'insieme dei valori f(K) è compatto in $\mathbb{R}$ quindi chiuso e limitato; pertanto f assume il valore massimo ed il valore minimo. □

2.5. <u>Teorema</u> SIA K UNO SPAZIO COMPATTO, X UNO SPAZIO DI HAUSDORFF, f UNA FUNZIONE CONTINUA DI K SU H. SE f E' INIETTIVA, E' UN OMEOMORFISMO.

<u>Dim.</u> Se $E \subset K$ è chiuso, è compatto; f(E) è compatto (Prop.2.3) quindi chiuso (Prop.2.2); quindi f trasforma chiusi in chiusi; se f è anche iniettiva su H, è aperta; poichè è continua è un omeomorfismo. □

2.6. <u>Corollario</u> SIA $(X,\mathcal{T}_1)$ COMPATTO ED $(X,\mathcal{T}_2)$ DI HAUSDORFF; SE $\mathcal{T}_2 < \mathcal{T}_1$ SEGUE $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_1$.

<u>Dim.</u> Usare il Teorema 2.5 con $x \in (X,\mathcal{T}_1) \to f(x)=x \in (X,\mathcal{T}_2)$. □

In altre parole: una topologia di spazio compatto su X è <u>minimale</u> nell'insieme delle topologie di Hausdorff su X.

2.2 Spazi normali; lemma di Urysohn.

2.7. Definizione Uno spazio topologico X è normale se dati due chiusi disgiunti esistono due aperti disgiunti che li contengono.

2.8. Proposizione UNO SPAZIO COMPATTO DI HAUSDORFF K E' NORMALE.

Dim. Siano $C_1, C_2 \subset K$ chiusi disgiunti; dobbiamo costruire $O_1, O_2 \subset K$ aperti tali che $O_1 \supset C_1$, $O_2 \supset C_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$. Sia $y \in C_2$; $\forall\ x \in C_1$ esistono intorni disgiunti $W_x(y)$, $W_y(x)$ di y ed x rispettivamente. Il ricoprimento $\{W_y(x);\ x \in C_1\}$ contiene un ricoprimento finito perchè C_1 è compatto; diciamo sia $W_y(x_1), \ldots, W_y(x_n)$ tale ricoprimento. Sia

$$O(y) = W_y(x_1) \cup \ldots \cup W_y(x_n) \supset C_1$$

$$W(y) = W_{x_1}(y) \cap \cdots \cap W_{x_n}(y) \ni y \quad .$$

$W(y)$ è un intorno di y; il ricoprimento $\{W(y);\ y \in C_2\}$ contiene un ric. finito $W(y), \ldots, W(y_m)$; sia

$$O_1 = O(y_1) \cap \cdots \cap O(y_m)$$

$$O_2 = W(y_1) \cup \cdots \cup W(y_m) \quad ;$$

O_1, O_2 sono aperti con le proprietà richieste. $\square$

2.9 <u>Lemma</u> (URYSOHN) SIA X UNO SPAZIO TOPOLOGICO NORMALE E C_o, C_1 CHIUSI DISGIUNTI IN X; ESISTE UNA FUNZIONE CONTINUA f DI X IN $[0,1]$ TALE CHE

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \qquad x \in C_o \\ f(x) &= 1 \qquad x \in C_1 \end{aligned}$$

<u>Dim.</u> Se C è chiuso ed O aperto, in X, con $C \subset O$, esiste un aperto O_o in X tale che

$$C \subset O_o \subset \overline{O_o} \subset O \quad . \tag{2.4}$$

Infatti C e $\complement O$ sono chiusi disgiunti; esistono O_o, O_1 aperti disgiunti che li contengono

$$C \subset O_o, \quad O_1 \supset \complement O, \qquad O_o \cap O_1 = \emptyset \quad ;$$

quindi $\overline{O_o} \cap O_1 = \emptyset$ e $C \subset O_o \subset \overline{O_o} \subset \complement O_1 \subset O$.

Applichiamo (2.4) a C_o ed $O_1 = X \setminus C_1$; esiste O_o aperto tale che

$$C_0 \subset O_0 \subset \overline{O_0} \subset O_1 = X \setminus C_1 \quad ;$$

applicando (2.4) a $\overline{O_0}$, O_1 costruiamo $O_{1/2}$; per induzione otteniamo per ogni razionale diadico t in $[0,1]$ un aperto O_t tale che

$$\text{(2.5)} \qquad \overline{O_t} \subset O_{t'} \quad \text{se} \quad t < t'.$$

Definiamo per ogni $t \in [0,1]$

$$O_t = \bigcup_{\substack{t' \leq t \\ t' \text{ raz.diadico}}} O_{t'} \quad ;$$

la proprietà (2.5) vale ancora: se $0 \leq t_1 < t_2 \leq 1$ siano t_1', t_2'' razionali diadici tali che $t_1 < t_1' < t_2' < t_2$; allora $O_{t_1} \subset O_{t_1'}$, $O_{t_2'} \subset O_{t_2}$ per definizione; $\overline{O_{t_1'}} \subset O_{t_2'}$ per la (2.5); $\overline{O_{t_1}} \subset O_{t_2}$.

Definiamo

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x \in C_1 \\ \operatorname{Inf}\left\{ t \in [0,1] \,/\, x \in \overline{O_t} \right\} & \text{se} \quad x \in O_1; \end{cases}$$

f è una funzione di X in $[0,1]$, $f(x)=0$ se $x \in C_0 \subset O_0$ e $f(x)=1$ se $x \in C_1$. Mostriamo che f è continua. Poichè per definizione

$$x\in O_t \Rightarrow x\in\overline{O}_t \Rightarrow f(x)\leq t \;;\; f(x)<t' \Rightarrow x\in\overline{O}_{t'}$$

segue $x\notin\overline{O}_t \Leftarrow f(x)>t$; $f(x)\geq t' \Leftarrow x\notin\overline{O}_{t'}$;

ed anche, usando la (2.5), $f(x)<t' \Rightarrow x\in O_{t'}$. Dunque

$$f^{-1}\Big([t',t]\Big)\supset O_t\setminus\overline{O}_{t'}\supset f^{-1}((t',t))$$

da cui abbiamo

$$f^{-1}((t_2,t_1)) = \bigcup_{t_2<t'<t<t_1} O_t\setminus\overline{O}_{t'} \;;$$

poichè $O_t\setminus\overline{O}_{t'}$ è aperto, $f^{-1}((t_2,t_1))$ è aperto ed f è <u>continua</u> (perchè gli intervalli aperti sono una base di aperti). $\square$

2.3 Teorema di Stone.

Se X è uno spazio topologico $\mathcal{C}_r(X)$ denoterà l'insieme di tutte le funzioni continue di X in $\mathbb{R}$.

Sia X compatto; X è di Hausdorff se e solo se $\mathcal{C}_r(X)$ <u>separa i punti</u>, cioè:

$$\forall\, x_1,x_2\in X,\ x_1\neq x_2 \quad \exists\, f\in\mathcal{C}_r(X),\ \ f(x_1)\neq f(x_2)\ .$$

(Necessità: 2.8, 2.9; sufficienza; se $a\in\mathbb{R}$ tale che $f(x_1)<$ $<a<f(x_2)$, $f^{-1}((-\infty,a))$ e $f^{-1}((a,+\infty))$ sono aperti che separano x_1 da x_2).

Sia X compatto, $f\in\mathcal{C}(X)$; f ammette un massimo ed un mini

$$(2.6) \qquad \| f \| = \sup_{x \in X} \left| f(x) \right| < \infty$$

Con le operazioni

$$(2.7) \qquad \begin{aligned} (\lambda f_1 + f_2)(x) &= \lambda f_1(x) + f_2(x) & \lambda \in \mathbb{R};\ f_1, f_2 \in \mathcal{C}_r(X) \\ (f_1 \cdot f_2)(x) &= f_1(x)\, f_2(x) & x \in X \end{aligned}$$

$\mathcal{C}_r(X)$ è un'<u>algebra reale commutativa</u>; la funzione

$$I : I(x) = 1, \qquad x \in X$$

è l'<u>identità</u> dell'algebra $\mathcal{C}_r(X)$.

La topologia <u>uniforme</u> di $\mathcal{C}_r(X)$ (è la topologia definita dalla <u>norma</u> (2.6) sullo spazio vettoriale reale $\mathcal{C}_r(X)$, vedi seguito par.4.1) è per definizione la più piccola topologia per cui sono aperti gli insiemi $\{ f \in \mathcal{C}_r(X) \ / \ \| f - f_0 \| < a \}$, $f_0 \in \mathcal{C}_r(X)$, $a \in \mathbb{R}_+$. Ogni punto ha una base numerabile di intorni, e $f \in \overline{M}$ se e solo se esiste una successione ordinaria $f_n \in M$ tale che

$$f_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} f(x) \quad \underline{\text{uniformemente}} \text{ in } x \in X .$$

Un sottoinsieme $\mathcal{A} \subset \mathcal{C}_r(X)$ è una <u>sottoalgebra</u> se $\mathcal{A}$ è un sottospazio vettoriale e $\mathcal{R}\cdot\mathcal{R}\subset\mathcal{R}$: cioè se $\mathcal{R}$ è stabile per le operazioni (2.7).

Chiaramente: $\overline{\mathcal{R}}$ è una sottoalgebra se $\mathcal{R}$ è una sottoalgebra.

Abbiamo visto che $\mathcal{C}_r(X)$ separa i punti se e solo se X è Hausdorff. Supponiamo che $M\subset \mathcal{C}_r(X)$ <u>separa i punti</u> del nostro spazio compatto; il fondamentale teorema seguente afferma che ogni funzione reale continua su X è limite uniforme di polinomi nelle funzioni appartenenti ad M.

2.10. <u>Teorema</u> (STONE-WEIERSTRASS)

SIA X UNO SPAZIO TOPOLOGICO COMPATTO, ED $\mathcal{R}_o\subset\mathcal{C}_r(X)$ UNA SOTTOALGEBRA CONTENENTE I. SE $\mathcal{R}_o$ SEPARA I PUNTI, $\overline{\mathcal{R}_o}=\mathcal{C}_r(X)$.

<u>Dim</u>. <u>Anticipiamo</u> due lemmi:

2.11 <u>Lemma</u> Sia $\mathcal{R}\subset\mathcal{C}_r(X)$ una sottoalgebra chiusa contenente I; sia $f_1,f_2\in\mathcal{R}$; allora

$$f_1\vee f_2\in\mathcal{R} \quad \text{ed} \quad f_1\wedge f_2\in\mathcal{R}$$

dove $(f_1\vee f_2)(x) = \sup\{ f_1(x), f_2(x)\}$ e $(f_1\wedge f_2)(x) =$ $= \inf\{ f_1(x), f_2(x)\}$, $x\in X$.

2.12 <u>Lemma</u> Sia $\mathcal{R}\subset \mathcal{C}_r(X)$ un sottospazio lineare che separa i punti di X e contiene I; per ogni $x_1,x_2 \in X, x_1\neq x_2$ e $a_1,a_2\in \mathbb{R}$ esiste $f \in \mathcal{R}$ tale che

$$f(x_1) = a_1 \quad ; \quad f(x_2) = a_2 \quad .$$

<u>Dim. del teorema</u>. Sia $\mathcal{R}\equiv\overline{\mathcal{R}_0}$; $\mathcal{R}$ è una sottoalgebra chiusa contenente I che separa i punti. Basta dimostrare che dato $g \in \mathcal{C}_r(X)$, $\varepsilon > 0$, esiste $f \in\mathcal{R}$ tale che

$$g(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq g(x) + \varepsilon \quad , \; x \in X. \tag{2.8}$$

Costruiamo f; siano $\xi, \eta \in X$; per (2.12) esiste $f_{\xi,\eta} \in \mathcal{R}$ tale che

$$f_{\xi,\eta}(\xi) = g(\xi); \quad f_{\xi,\eta}(\eta) = g(\eta).$$

Sia $U_{\xi,\eta} = \{ x \in X \,/\, f_{\xi,\eta}(x) < g(x) + \varepsilon \}$

$$V_{\xi\eta} = \{ x \in X \,/\, g(x) - \varepsilon < f_{\xi,\eta}(x) \}.$$

Fissato ξ , $\{ U_{\xi\eta} \; ; \; \eta \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X poichè $\eta \in U_{\xi,\eta}$ e $g, f_{\xi,\eta}$ sono continue. Poichè X è <u>compatto</u> esistono $\eta_1, \dots, \eta_n \in X$ tali che

$$\bigcup_{i=1}^{n} U_{\xi,\eta_i} = X .$$

Definiamo

$$f_\xi = f_{\xi,\eta_1} \wedge \dots \wedge f_{\xi,\eta_n}, \qquad \xi \in X .$$
$$V_\xi = V_{\xi,\eta_1} \cap \dots \cap V_{\xi,\eta_n}$$

Allora $f_\xi \in \mathcal{R}$ (Lemma 2.11) e

$$f_\xi(x) < g(x) + \varepsilon \qquad \forall x \in X$$
$$g(x) - \varepsilon < f_\xi(x) \quad \text{se} \quad x \in V_\xi .$$

Ma $\xi \in V_\xi$ e V_ξ è aperto; quindi esiste un ricoprimento <u>finito</u> $V_{\xi_1}, \dots, V_{\xi_m}$ di X.

Definiamo

$$f = f_{\xi_1} \vee \dots \vee f_{\xi_m} \quad ;$$

per il Lemma (2.11) $f \in \mathcal{R}$ e per costruzione f soddisfa l'equazione (2.8).

Dimostrazione del Lemma 2.11. Osserviamo che

$$(f_1 \vee f_2)(x) = \frac{1}{2}\,(f_1(x)+f_2(x)+|f_1(x)-f_2(x)|)$$

$$(f_1 \wedge f_2)(x) = \frac{1}{2}\,(f_1(x)+f_2(x)-|f_1(x)-f_2(x)|)$$

Basta: $(x \in X \to |f(x)|) \in \mathcal{R}$ se $f \in \mathcal{R}$.

Sia $f \neq 0$, si ha

$$|f(x)| = \|f\| \cdot (1 - (1 - \frac{f(x)^2}{\|f\|^2}))^{1/2}$$

Poichè la serie di Taylor di $z \in \mathbb{C} \longrightarrow (1-z)^{1/2}$ converge uniformemente(*) in $[0,1]$, $|f|$ è limite uniforme, al variare di $x \in X$, di polinomi in f, e quindi $|f| \in \mathcal{R}$.

Dimostrazione del Lemma 2.12. Sia $f' \in \mathcal{R}$ con $f'(x_1) \neq f'(x_2)$; $f = \alpha I + \beta f'$ per una scelta opportuna di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. □

Il teorema di Stone si generalizza immediatamente al caso di funzioni continue complesse. Sia X uno spazio topologico com

---

(*) La serie di Taylor di $1-(1-z)^{1/2}$ ha coefficienti non negativi a_n con $\sum a_n = 1$ poichè, $\forall N$, $z \in (0,1)$, $\sum_{n=0}^{N} a_n z^n < 1 - (1-z)^{1/2} < 1$ quindi $\sum_{n=0}^{N} a_n \leq 1$.

patto, $\mathcal{C}(X)$ la collezione di tutte le funzioni continue di X in $\mathbb{C}$; le operazioni (2.7) con $\mathbb{R}$ sostituito da $\mathbb{C}$ definiscono una struttura di algebra complessa e

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)| < \infty \qquad \text{se} \qquad f \in \mathcal{C}(X)$$

definisce come sopra la topologia uniforme in $\mathcal{C}(X)$. Inoltre, se $f \in \mathcal{C}(X)$ definiamo

$$f^* : x \in X \longrightarrow \overline{f(x)} \in \mathbb{C} \quad .$$

L'algebra $\mathcal{C}(X)$ munita di $*$ è un'algebra involutiva; una sottoalgebra $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(X)$ è detta una <u>sottoalgebra involutiva</u> se $f \in \mathcal{R} \Rightarrow f^* \in \mathcal{R}$.

2.11 <u>Corollario</u> SIA X UNO SPAZIO TOPOLOGICO COMPATTO, $\mathcal{R}$ UNA SOTTOALGEBRA INVOLUTIVA DI $\mathcal{C}(X)$ CONTENENTE I, SE $\mathcal{R}$ SEPARA I PUNTI, $\mathcal{R}$ E' DENSA: $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{C}(X)$.

<u>Dim.</u> Sia $\mathcal{R}_o = \{f \in \mathcal{R}\ ;\ f = f^*\}$; basta dimostrare che $\mathcal{R}_o$ è denso in $\mathcal{C}_r(X)$. Ma $\mathcal{R}_o$ è una sottoalgebra dell'algebra reale $\mathcal{C}_r(X)$; inoltre se $x_1 \neq x_2$ $\exists$ $z \in \mathcal{R}$, $z(x_1) \neq z(x_2)$ quindi, ponendo $\frac{1}{2}(z+z^*) = f$, $\frac{1}{2i}(z-z^*) = g$, si ha $f,g \in \mathcal{R}_o$ e $f(x_1) \neq f(x_2)$

oppure $g(x_1) \neq g(x_2)$ cioè $\mathcal{R}_0$ separa i punti; poichè $I \in \mathcal{R}_0$, il teorema 2.10 dice che $\overline{\mathcal{R}_0} = \mathcal{C}(X)$. $\square$

Omettiamo la facile dimostrazione di

2.12. Corollario. SIA $\mathcal{R} \subset \mathcal{C}(X)$ UNA SOTTOALGEBRA INVOLUTIVA CHE SEPARA I PUNTI DELLO SPAZIO COMPATTO X. ALLORA $\overline{\mathcal{R}} = \mathcal{C}(X)$ OPPURE $\exists\ x_0 \in X$ TALE CHE

$$\overline{\mathcal{R}} = \left\{ f \in \mathcal{C}(X) \ / \ f(x_0) = 0 \right\} .$$

Esempi

I. Sia X un compatto di $\mathbb{R}$. I polinomi in $t \in X$ formano un'algebra contenente I che separa i punti: ogni funzione continua su X è limite uniforme di polinomi.

II. Sia X un compatto di $\mathbb{C}$, $\mathcal{R}$ l'algebra dei polinomi senza termine costante nelle variabili $z, \bar{z}$. Se $0 \notin X$, $\mathcal{R}$ è denso in $\mathcal{C}(X)$; se $0 \in X$, $\mathcal{R}$ è denso in $\left\{ f \in \mathcal{C}(X) \ / \ f(0) = 0 \right\}$.

III. Sia A un insieme di indici, $R : \alpha \in A \longrightarrow R(\alpha)$ una funzione di A in $(0, \infty)$; X_α il compatto in $\mathbb{C}$: $\left\{ z / \ |z| \leq R(\alpha) \right\}$, ed X lo spazio topologico prodotto $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$.

Le proiezioni $\left\{ P_\alpha \ ; \ \alpha \in A \right\}$ formano un sottoinsieme di

$\mathcal{C}(X)$ che separa i punti; per 2.11, ogni funzione continua su X è limite uniforme di polinomi a coefficienti complessi nelle variabili P_α , P_α^* ; $\alpha \in A$.

2.4. Spazi localmente compatti; spazi connessi; teorema di Tietze.

Un sottoinsieme dello spazio topologico X è detto relativamente compatto se la sua chiusura è un compatto di X.

Uno spazio topologico X è detto localmente compatto se ogni punto ammette un intorno relativamente compatto. In tal caso: ogni punto ammette una base di intorni relativamente compatti.

Ogni spazio compatto è localmente compatto.

Sia X uno spazio compatto di Hausdorff; X_1 un chiuso in X; $X_2 = \complement X_1$. Munito della topologia relativa, X_2 è uno spazio topologico localmente compatto: se $x \in X_2$, $\{x\}$ è chiuso $\subset X_2$ che è aperto quindi $\exists$ aperto contenente x con chiusura inclusa in X_2 (dim.di 2.9). Tale aperto è un intorno relativamente compatto di x in X_2.

Se X_2 non è chiuso, X_2 è localmente compatto non compatto: $x \in \overline{X_2} \setminus X_2$ è il punto limite in X di una successione generalizzata in X_2 convergente in X ma priva di punti limite in X_2 (cf.

§1.3 e §2.1).

Uno spazio topologico è <u>connesso</u> se non è l'unione di alcuna coppia di chiusi non vuoti disgiunti.

Sia X compatto di Hausdorff, x_∞ un punto di X; $X \setminus \{x_\infty\}$ è uno spazio topologico localmente compatto nella topologia indotta da X, non compatto se $\{x_\infty\}$ non è aperto (in particolare: se X è connesso).

La proposizione seguente mostra che ogni spazio localmente compatto di Hausdorff è di questo tipo.

2.13 <u>Proposizione</u>. SIA X LOCALMENTE COMPATTO DI HAUSDORFF; ESISTE UNO SPAZIO COMPATTO DI HAUSDORFF X_∞ E $x_\infty \in X_\infty$ TALI CHE X E' OMEOMORFO AL SOTTOSPAZIO $X_\infty \setminus \{x_\infty\}$.

<u>Dim.</u> Il complementare di un compatto in X si dirà un "intorno dell'∞". Poichè X è localmente compatto ogni punto possiede un intorno disgiunto da un intorno dell'infinito.

Definiamo $X_\infty = X \cup \{x_\infty\}$ dove $x_\infty \notin X$: $x_\infty = \emptyset$ per esempio. Diremo che $U \subset X_\infty$ è aperto se $U \subset X$ ed è aperto in X (munito della sua topologia iniziale) ovvero se $x_\infty \in U$ <u>ed</u> $U \cap X$ è il complementare di un compatto. Gli assiomi 1.2.3 del paragrafo 1.3 sono banalmente verificati ed è anche evidente che X è omeomorfo ad $X_\infty \setminus \{x_\infty\}$. Se $\mathcal{C}$ è un ricoprimento aperto di X_∞ esiste un intorno dell'infinito $U \subset X$ tale che $U \cup \{x_\infty\} \in \mathcal{E}$; allora $\mathcal{E} \setminus \{U \cup \{x_\infty\}\}$ è un ricoprimento aperto del compatto $\complement U$ da cui possiamo estrarre un ricoprimento finito. $\square$

Osservazione 1. Alternativamente, è immediato dimostrare che X_∞ è compatto usando 4., par.2.1.

Osservazione 2. Sia (X'_∞, x'_∞) uno spazio compatto ed un suo elemento tali che $X'_\infty \setminus \{x'_\infty\}$ sia omeomorfo ad X; esiste un omeomorfismo φ di X_∞ su X'_∞ tale che $\varphi(x_\infty) = x'_\infty$; cioè la coppia (X_∞, x_∞) della prop.2.13 è unica.

Lo spazio top.X_∞ è detto la compattificazione ad un punto di X .

Diremo che $f \in \mathcal{C}(X)$ è continua all'∞ con $\lim_{x \to \infty} f = \lambda$ se dato $\varepsilon > 0$, $\exists$ un intorno dell'∞ U_ε tale che $|f(x) - \lambda| < \varepsilon$ per $x \in U_\varepsilon$. Se $\lambda = 0$ diremo che f è nullo all'∞ .

Sia $f \in \mathcal{C}(X)$; esiste $f_\infty \in \mathcal{C}(X_\infty)$ tale che $f = f_\infty |X$ se e solo se f è continua all'∞ .

Dai corollari 2.11, 2.12 segue facilmente:

2.14 Proposizione. SIA X UNO SPAZIO TOPOLOGICO LOCALMENTE COMPATTO, $\mathcal{R}$ UN'ALGEBRA INVOLUTIVA DI FUNZIONI CONTINUE COMPLESSE NULLE ALL'∞ , CHE NON SI ANNULLANO SIMULTANEAMENTE IN ALCUN PUN

TO DI X E CHE SEPARINO I PUNTI DI X. ALLORA OGNI FUNZIONE CONTINUA DI X IN $\mathbb{C}$ NULLA ALL'∞ E' LIMITE UNIFORME DI FUNZIONI DI $\mathcal{R}$.

Chiaramente l'insieme $\mathcal{C}_0(X)$ delle funzioni complesse continue nulle all'∞ sullo spazio localmente compatto X è un sottoinsieme chiuso di $\mathcal{C}_B(X)$ (funzioni continue limitate).

In generale, vedremo in seguito che: se X è uno spazio topologico ed $E \subset X$, le restrizioni ad E di funzioni continue limitate su X formano un sottoinsieme <u>chiuso</u> di $\mathcal{C}_B(E)$ (cf.(i), Corollario 4.34).

Anticipando questo fatto abbiamo il seguente <u>teorema di estensione di Tietze</u>:

2.15 <u>Teorema</u>. SIA X UNO SPAZIO COMPATTO DI HAUSDORFF, E UN CHIUSO IN X ED $f \in \mathcal{C}_r(E)$. ESISTE UNA FUNZIONE $F \in \mathcal{C}_r(X)$ TALE CHE

$$f = F\big|E \quad ; \quad \|F\| = \|f\| \quad .$$

<u>Dim</u>. Le restrizioni ad E di funzioni continue di X formano una sottoalgebra involutiva di $\mathcal{C}(E)$ che contiene I e separa i punti; poichè E è compatto, per il teorema di Stone tale sottoalgebra è densa in $\mathcal{C}(E)$; essendo anche chiusa tale

sottoalgebra coincide con $\mathcal{C}(E)$.

Quindi se $f \in \mathcal{C}(E)$ esiste $F \in \mathcal{C}(X)$ tale che $f = F|E$; basta dimostrare che F si può scegliere con norma pari ad $\|f\|$ se F è <u>reale</u>.

Sia $F_0 \in \mathcal{C}_r(X)$ una estensione qualunque di f; allora possiamo definire la funzione continua

$$F = \left(F_0 \vee (-\|f\|) \cdot 1\right) \wedge \|f\| \cdot I$$

chiaramente $F|E = F_0|E = f$ e $\|F\| \leq \|f\|$ quindi $\|F\| = \|f\|$. $\square$

<u>Esercizio</u> Sia X localmente compatto di Hausdorff. Le condizioni seguenti sono equivalenti:

(i) X è l'unione di una famiglia numerabile di insiemi compatti.

(ii) esiste una funzione reale continua φ che tende a zero all'infinito in X, e tale che $\forall x \in X$, $\varphi(x) > 0$.

(Per (i) $\Rightarrow$ (ii) modificare la dimostrazione del Lemma di URYSOHN).

III. SPAZI METRICI.

3.1 Completamento di uno spazio metrico; teorema di Baire.

Sia X un insieme, d una funzione di $X \times X$ in $\mathbb{R}$; d è detta una distanza se d è simmetrica, si annulla sulla diagonale ed ivi soltanto, e vale la disuguaglianza triangolare:

$$(3.1) \qquad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ ; \quad x,y,z \in X \ .$$

Da (3.1) e la simmetria di d segue:

$$(3.2) \qquad d(x,y) \geq \left| d(x,z) - d(z,y) \right| \ ; \quad x,y,z \in X.$$

Se d è una distanza segue da (3.2): $d(x,y) > 0$ se e solo se $x \neq y$.

La coppia (X,d) è uno spazio metrico. La topologia indotta dalla metrica d è la topologia $\mathcal{T}(d)$ definita dalla subbase di aperti

$$\left\{ B_{x,R} \,/\, x \in X \ , \ R \in \mathbb{R}_+ \right\}$$

dove, se $x_0 \in X$ e $R > 0$,

$$B_{x_0,R} = \{ x \in X \,/\, d(x,x_0) < R \}$$

è detta la palla di raggio R e centro x_0 in X.

Se $y_0 \in X$, la funzione

$$x \in X \longrightarrow d(x,y_0) \in \mathbb{R}$$

è continua (usare la (3.2)); $\overline{B_{x_0,R}} \subseteq \{ x \in X \,/\, d(x,x_0) \leq R \}$.

Se $S_1, S_2 \subset X$ la distanza tra i due insiemi è definita da

$$d(S_1,S_2) = \operatorname*{Inf}_{x_1 \in S_1,\, x_2 \in S_2} d(x_1,x_2) .$$

Se $S \subset X$, la funzione

$$x \in X \longrightarrow d(x,S)$$

soddisfa $|d(x,S) - d(y,S)| \leq d(x,y)$, come segue da (3.1), dalla definizione di "inf", quindi è continua.

Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T}_{(d)})$ è di Hausdorff:
se $x \neq y$, $d(x,y) = a > 0$, e $B_{x,\frac{a}{2}}$, $B_{y,\frac{a}{2}}$
sono intorni disgiunti: altrimenti per $z \in B_{x,\frac{a}{2}} \cap B_{y,\frac{a}{2}}$, dalla

(3.1) seguirebbe l'assurdo

$$a = d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z) < \frac{a}{2} + \frac{a}{2} .$$

Sia $(X,\mathcal{T})$ uno spazio topologico e d una distanza su X tale che $\mathcal{T} = \mathcal{T}(d)$; $(X,\mathcal{T})$ è detto spazio topologico metrico, $\mathcal{T}$ è detta metrizzabile e d è detta una distanza compatibile con $\mathcal{T}$. Un tale spazio topologico è di Hausdorff e ogni punto ha una base numerabile di intorni.

Se $(X,\mathcal{T})$ è uno spazio metrico compatto e d una distanza compatibile, il d-diametro di X

$$\sup \{ d(x,y) / x,y \in X \}$$

è finito: la funzione $(x,y) \in X \times X \longrightarrow d(x,y)$ è continua (equazione (3.2)) quindi dotata di massimo sul compatto $X \times X$ (Corollario 2.4 e teorema 2.1).

Esempi. 1. La topologia abituale di $\mathbb{C}^n$ è indotta dalla distanza $d(x,y) = (\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2)^{1/2}$.

2. La topologia uniforme in $\mathcal{C}(K)$, K compatto, è definita dalla distanza $d(f,g) = \|f-g\|$.

3. Per ogni intero n sia X_n uno spazio topologi-

co metrico e d_n una distanza compatibile con la sua topologia. Lo spazio topologico prodotto

$$(X,\mathcal{T}) = \prod_{n=1}^{\infty} (X_n, \mathcal{T}(d_n))$$

è <u>metrico</u>: una distanza compatibile con la topologia $\mathcal{T}$ è data da:

(3.3)
$$d(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \delta_n(x,y) \quad ;$$
$$\delta_n(x,y) = \frac{d_n(p_n(x), p_n(y))}{1 + d_n(p_n(x), p_n(y))} \quad ;$$

(d è una <u>distanza</u> perchè f: $f(t) = \frac{t}{1+t}$ è <u>subadditiva</u>: $f(t+t') \leq f(t)+f(t')$).

Infatti, $\mathcal{T}(d) < \mathcal{T}$ poichè le funzioni $x \in X \to \delta_n(x,x_0)$ è continua, da cui: $B_{x_0,R}$ è aperto. Inoltre $\mathcal{T}(d) > \mathcal{T}$ poichè ogni elemento della base di intorni di x_0 per $\mathcal{T}$

$$\bigcap_{n\in I} p_n^{-1}(B_{p_n(x_0),R}) \; ; \quad I \text{ finito} \subseteq \mathbb{N},\ R > 0 \; ;$$

contiene l'intorno $B_{x_0,R'}$ per $\mathcal{T}(d)$ se $2^N R' \leq \frac{R}{1+R}$ dove N è il massimo intero in I.

Siano (X,d) ed (X',d') spazi metrici; una funzione $f:X \to X'$ è uniformemente continua se dato $\mathcal{E} > 0$ $\exists \delta_{\mathcal{E}} > 0$ tale che $d'(f(x), f(y)) < \mathcal{E}$ se $d(x,y) < \delta_{\mathcal{E}}$, $x,y \in X$. Segue che $f : (X, \mathcal{T}(d)) \longrightarrow (X', \mathcal{T}(d'))$ è continua; ma il viceversa non vale in generale.

La funzione f è isometrica se $d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$, $x, y \in X$. Una funzione isometrica è uniformemente continua.

Nell'esempio 3. precedente, la proiezione $p_n : (X,d) \to (X_n, d_n)$ è uniformemente continua.

Sia (X,d) uno spazio metrico, $M \subset X$ e $\overline{M}$ la chiusura di M nella topologia indotta $\mathcal{T}(d)$. Se $x \in \overline{M}$ esiste una successione ordinaria $x_n \in M$ tale che $d(x,x_n) \longrightarrow 0$ cioè

$$\lim x_n = x \quad ;$$

basta scegliere $x_n \in B_{x,\frac{1}{n}} \cap M$. Poichè

$$d(x_n,x_m) \leqslant d(x,x_n) + d(x,x_m)$$

segue

$$(3.4) \qquad d(x_n, x_m) \longrightarrow 0 \quad \text{se} \quad (n,m) \longrightarrow \infty$$

Una successione $x_n \in X$ è una <u>successione di Cauchy</u> dello spazio metrico (X,d) se soddisfa (3.4), cioè $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0$ tale che $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ se $n > n_0$, $m > n_0$. Se esistono punti limite di una successione di Cauchy, essa è convergente ed il limite è unico.

Lo spazio metrico (X,d) è <u>completo se ogni successione di Cauchy è convergente</u>.

<u>Attenzione</u>: questa proprietà dipende dalla metrica e non soltanto dalla topologia indotta. Per esempio, la topologia abituale su $X = [1, \infty)$ ammette le due distanze compatibili.

$$d(x,y) = |x-y| \quad ; \quad d'(x,y) = \left| \frac{1}{x^2} - \frac{1}{y^2} \right| .$$

(X,d) è completo mentre (X,d') <u>non</u> è completo. (La completezza è una proprietà della "struttura uniforme" definita dalla distanza; tuttavia, cf.paragrafo 3.2, prop.3.7, 3.8).

Sia (X_n, d_n) uno spazio metrico completo per ogni intero n; l'insieme prodotto $X = \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ munito della distanza definita dall'equazione (3.3) è uno spazio metrico completo.

3.1. <u>Proposizione</u>. SIANO (X,d) ED (X',d') SPAZI METRICI, $E\subset X$ UN INSIEME DENSO NELLA TOPOLOGIA INDOTTA $\mathcal{T}(d)$, ED $f:(E,d) \longrightarrow (X',d')$ UNA FUNZIONE UNIFORMEMENTE CONTINUA. SE (X',d') E' COMPLETO, ESISTE UNA ED UNA SOLA FUNZIONE UNIFORMEMENTE CONTINUA $F:(X,d) \longrightarrow (X',d')$ TALE CHE $F\big|_E = f$.
SE f E' ISOMETRICA, F E' ISOMETRICA.

<u>Dim</u>. Sia $x\in X$ e $x_n\in E$ una successione convergente ad x. Poichè $\{x_n\}$ è di Cauchy in (E,d) ed f è uniformemente continua $\{f(x_n)\}$ è di Cauchy in (X',d'). Poichè (X',d') è completo, $\{f(x_n)\}$ è convergente.

Sia $y=\lim_{n\to\infty} f(x_n)$; proviamo che y dipende solo da x e $y=F(x)$ definisce l'estensione richiesta.

Sia $\varepsilon\in \mathbb{R}_+ \rightarrow \delta(\varepsilon)\in \mathbb{R}_+$ tale che se $d(x,y)<\delta(\varepsilon)$, $x,y\in E$ allora $d'(f(x),f(y))<\varepsilon$.

Siano $x,y\in X$, $d(x,y)<\delta(\varepsilon)$, ed x_n, y_n successioni in E convergenti ad x ed ad y rispettivamente. Detto $\varepsilon'=\delta(\varepsilon)-d(x,y)$ esiste n_o tale che se $n>n_o$, $d(x,x_n)<\frac{\varepsilon'}{2}$, $d(y,y_n)<\frac{\varepsilon'}{2}$; quindi se $n>n_o$, $m>m_o$, si ha $d(x_n,y_m)<\delta(\varepsilon)$ e

$$d'(f(x_n),f(y_m))<\varepsilon$$

poichè la distanza è una funzione continua segue

$$d'(F(x), F(y)) < \varepsilon$$

da cui segue che F è ben definita ed uniformemente continua.

Se $d'(f(x_n), f(y_m)) = d(x_n, x_m)$, passando al limite si trova che F è isometrica. $\square$

3.2. Proposizione. SIA (X,d) UNO SPAZIO METRICO; ESISTE UNO SPAZIO METRICO COMPLETO $(\tilde{X},\tilde{d})$ ED UNA APPLICAZIONE ISOMETRICA DI X SU UN INSIEME DENSO IN $(\tilde{X}, \mathcal{C}(\tilde{d}))$.

Dim. Sia Z l'insieme i cui elementi sono le successioni di Cauchy in X, ed R la relazione

$$R(\{x_n\}, \{y_n\}) : d(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

E' immediato verificare che R è una relazione di equivalenza. Sia $\tilde{X} = X/R$ l'insieme delle classi. Se $\tilde{x},\tilde{y} \in \tilde{X}$ e $\{x_n\} \in \tilde{x}$, $\{y_n\} \in \tilde{y}$, è immediato che

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)$$

esiste e dipende solo da $\tilde{x},\tilde{y}$.

Sia $\tilde{d}(\tilde{x},\tilde{y})$ il numero così ottenuto; la funzione $\tilde{d}$ è una distanza su $\tilde{X}$. $(\tilde{X},\tilde{d})$ è completo.

(Esercizio: verificare queste 4 affermazioni).

Sia $\psi : X \to \tilde{X}$ l'applicazione che associa ad $x \in X$ la classe della successione $\{x_n = x;\ n \in \mathbb{N}\}$. Per definizione ψ è isometrica. Basta verificare che $\psi(X)$ è denso in $(\tilde{X}, \mathcal{T}(\tilde{d}))$.

Sia $\tilde{x} \in \tilde{X}$ ed $\{x_n; n \in \mathbb{N}\} \in \tilde{x}$; allora

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \psi(x_n)) = \lim_{m \to \infty} d(x_m, x_n) \quad ;$$

poichè $\{x_n\}$ è di Cauchy, esiste n_ε tale che $d(x_m, x_n) < \varepsilon$ se $n > n_\varepsilon$, $m > n_\varepsilon$. Passando al limite per $m \to \infty$ abbiamo

$$\tilde{d}(\tilde{x}, \psi(x_n)) < \varepsilon \quad \text{se} \quad n > n_\varepsilon \quad ;$$

quindi $\tilde{x} = \lim \psi(x_n)$ appartiene alla chiusura di $\psi(X)$ e $\psi(X)$ è denso. $\square$

<u>Osservazione</u> 1. Sia (X,d) uno spazio metrico completo, ed $E \subset X$; (E,d) è completo se e solo se E è chiuso in $(X, \mathcal{T}(d))$; se $f:(X,d) \to (X',d')$ è isometrica, $f(X)$ è chiuso in X'.

<u>Osservazione</u> 2. Sia (X,d) uno spazio metrico e (X',d') uno spazio metrico completo, f una funzione uniformemente con-

tinua di X in X'. Allora $f\circ\psi^{-1}$ è uniformemente continua dallo insieme denso $\psi(X)$ di $(\tilde{X},\tilde{d})$ in X'. Per la proposizione 3.1, esiste una funzione F uniformemente continua di $(\tilde{X},\tilde{d})$ in (X',d') che estende $f\circ\psi^{-1}$, dunque tale che

$$f = F\circ\psi$$

In particolare se f è isometrica a condominio denso, F è isometrica (Proposizione 3.1) e surgettiva (Osservazione 1).

Quindi $(\tilde{X},\tilde{d})$ è <u>unico a meno di isomorfismi</u> tra spazi metrici. $(\tilde{X},\tilde{d})$ è detto il <u>completamento</u> di (X,d).

3.3. <u>Teorema</u> (BAIRE) SIA (X,d) UNO SPAZIO METRICO COMPLETO. LO SPAZIO TOPOLOGICO $(X, \mathcal{T}(d))$ NON E' DI PRIMA CATEGORIA.

3.4. <u>Proposizione</u>. SIA X UNO SPAZIO TOPOLOGICO PER CUI ESISTE UNA DISTANZA COMPATIBILE CON LA TOPOLOGIA TALE CHE X SIA COMPLETO. L'INTERSEZIONE DI UNA FAMIGLIA NUMERABILE U_n DI APERTI DENSI IN X E' DENSA IN X.

<u>Dim</u>. Osserviamo che 3.4 $\Rightarrow$ 3.3: se $E_n \subset X$ è raro, $U_n = \complement\overline{E_n}$ è un aperto denso quindi

$$X \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \supset \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$$

è <u>denso</u> per 3.4.

<u>Dim. della proposizione 3.4.</u> Sia $x \in X$, $0 < R$; basta dimostrare che $B_{x,R}$ contiene punti di $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Poichè U_1 è aperto denso, $B_{x,R} \cap U_1$ è aperto non vuoto; sia $x_1 \in X$, $0 < R_1 < \frac{1}{2}$ tali che

$$\overline{B_{x_1,R_1}} \subset B_{x,R} \cap U_1 \quad ;$$

poichè U_2 è aperto denso, $B_{x_1,R_1} \cap U_2$ è aperto non vuoto ed esiste $x_2 \in X$, $0 < R_2 < \frac{1}{2^2}$ tali che

$$\overline{B_{x_2,R_2}} \subset B_{x_1,R_1} \cap U_2 \quad ;$$

procedendo così si ottiene una successione $x_n \in X$ ed $R_n < \frac{1}{2^n}$ tali che

$$x_m \in B_{x_n,R_n} \quad \text{se} \quad m \geq n \tag{3.5}$$

$$\overline{B_{x_n,R_n}} \subseteq B_{x,R} \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n \quad . \tag{3.6}$$

Per la (3.5), $d(x_m, x_n) < \frac{1}{2^n}$ se $m \geq n$ ed $\{x_n\}$ è di Cauchy. Poichè X è completo esiste $y = \lim x_m$. Per la (3.5) $y \in \overline{B_{x_n,R_n}}$ per ogni n e per la (3.6)

$$y \in B_{x,R} \cap U_1 \cap U_2 \cap \ldots \qquad \square$$

Sia X uno spazio topologico; se l'intersezione di ogni famiglia numerabile di aperti densi è densa, X è detto uno spazio di Baire.

Sia X uno spazio topologico; $E \subset X$ è un insieme G_δ se è l'intersezione di una famiglia numerabile di aperti. In uno spazio di Baire l'intersezione di una famiglia numerabile di G_δ densi è un G_δ denso (poiché l'unione numerabile di famiglie numerabili è numerabile).

Evidentemente: uno spazio topologico che sia completo per una distanza compatibile con la topologia è uno spazio di Baire (Proposizione (3.4); uno spazio localmente compatto di Hausdorff è di Baire (per un argomento simile alla dimostrazione della Proposizione 3.4: vedi K. YOSIDA, Functional Analysis).

Esempio 1.

Sia X l'insieme dei numeri razionali, $d(x,y) = |x - y|$. Lo spazio topologico $(X, \mathcal{T}(d))$ è di prima categoria ed (X,d) non è completo. Il completamento è isomorfo ad $(\mathbb{R},d)$ con $d(x,y) = |x-y|$.

Esempio 2. Sia X l'insieme delle successioni di numeri complessi con al più un numero finito di termini non nulli, $d(x,y) = \sup_n |x_n - y_n|$; $(X, \mathcal{T}(d))$ è di prima categoria. Il completamento dello spazio metrico (X,d) è $(\tilde{X},\tilde{d})$ dove $X = \mathcal{C}_o(\mathbb{N})$ successioni che tendono a zero all'infinito) e $\tilde{d}(x,y) = \|x-y\|$.

Esercizio: produrre una successione di insiemi rari che formino un ricoprimento di X.

Osservazione. Sia (X,d) completo, $E \subset X$ aperto tale che $\complement E$ non è aperto; (E,d) non è completo ma $(E, \mathcal{T}(d))$ non è di I^a categoria: infatti esiste una distanza d' su E compatibile con $\mathcal{T}(d)$ per cui (E,d') è completo. Per esempio

$$d'(x,y) = d(x,y) + \left| \frac{1}{d(x, \complement E)} - \frac{1}{d(y, \complement E)} \right| , \quad x,y \in E.$$

Esercizio: verificare queste affermazioni.

Esempio 3. Sia X uno spazio topologico, $\mathcal{C}_B(X)$ l'insieme delle funzioni continue e limitate di X in $\mathbb{C}$; munito della distanza

$$d(f,g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$$

$\mathcal{C}_\beta(X)$ <u>è uno spazio metrico completo</u>. Infatti se $f_n \in \mathcal{C}_\beta(X)$, e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste n_ε tale che

$$(3.7) \qquad \left| f_n(x) - f_m(x) \right| \leq \| f_n - f_m \| < \varepsilon \quad ; \quad n,m > n_\varepsilon$$

allora $f_n(x)$ è una successione di Cauchy in $\mathbb{C}$ ed esiste $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $x \in X$. Passando al limite per $m \to \infty$ nella (3.7) abbiamo

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \quad \text{se} \quad n > n_\varepsilon \quad , \quad x \in X$$

da cui segue che f è continua, limitata e $f = \lim f_n$.

<u>Esercizio</u>. Sia (X,d) metrico completo, $f: X \to X$ una funzione per cui esiste $K < 1$ tale che

$$d(f(x), f(y)) \leq K\, d(x,y) \qquad x,y \in X \;;$$

allora esiste uno ed un solo <u>punto fisso</u> x_0: $f(x_0) = x_0$.

(Per ogni $x \in X$, $f^n(x) = f \circ f \ldots \circ f(x)$ è di Cauchy; ...).

3.2. Spazi metrici compatti; teorema di Ascoli-Arzelà

Sia X uno spazio topologico; X è separabile se esiste un insieme numerabile denso in X.

Se X ammette una base numerabile di aperti, $\{U_1, U_2 \dots\}$ X è separabile. Infatti sia $x_n \in U_n$; $\{x_1, x_2, \dots\}$ è denso in X: se $x \in X$ ed U_x è un intorno di x, esiste $U_i \subset U_x$ quindi $x_i \in U_x$.

Il viceversa è falso in generale; tuttavia:

3.5. Proposizione. UNO SPAZIO TOPOLOGICO METRIZZABILE E' SEPARABILE SE E SOLO SE AMMETTE UNA BASE NUMERABILE DI APERTI.

Dim. Sia $E \subset X$ numerabile denso; l'insieme numerabile $\mathcal{U} = \{B_{x,\frac{1}{n}} \mid x \in E,\ n \in \mathbb{N}\}$ è una base di aperti. Infatti se U è aperto in X e $x_0 \in U$ esiste $R > 0$ tale che $B_{x_0,R} \subset U$; se $x \in E$ è tale che $d(x_0,x) < \frac{1}{n} \leq \frac{R}{2}$ segue $x_0 \in B_{x,\frac{1}{n}} \subset B_{x_0,R} \subset U$. Quindi ogni punto di U appartiene ad un elemento di $\mathcal{U}$ contenuto in U, e $\mathcal{U}$ è una base. $\square$

3.6. Proposizione. UNO SPAZIO COMPATTO METRIZZABILE E' SEPARABILE.

Dim. Per ogni $\varepsilon > 0$, $\{B_{x,\varepsilon} \mid x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X dove $B_{x,\varepsilon}$ è definito in termini di una distanza compatibile d.

Poichè X è compatto esiste un insieme <u>finito</u> $X_\varepsilon \subset X$ tale che $\{B_{x,\varepsilon} \,/\, x \in X_\varepsilon\}$ è un <u>ricoprimento</u>. Allora $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} X_{1/n}$ è un insieme numerabile denso: $\forall x \in X$, $n \in \mathbb{N}$, $\exists\, x' \in X_{1/n}$ tale che $d(x,x') < \frac{1}{n}$. $\square$

3.7. <u>Proposizione</u>. SIA X COMPATTO METRIZZABILE, d UNA DISTANZA COMPATIBILE CON LA TOPOLOGIA DI X; ALLORA (X,d) E' COMPLETO.

<u>Dim.</u> Sia $\{x_n\}$ una successione di Cauchy in (X,d). Poichè X è compatto l'insieme dei punti limite di $\{x_n\}$ è non vuoto (cf.par.2.1); poichè $\{x_n\}$ è di Cauchy, $\{x_n\}$ è convergente. $\square$

3.8. <u>Proposizione</u>. SIA f UNA FUNZIONE CONTINUA DELLO SPAZIO COMPATTO X NELLO SPAZIO TOPOLOGICO X'. SE X,X' SONO METRIZZABI LI CON DISTANZE COMPATIBILI d,d', ALLORA

$$f : (X,d) \longrightarrow (X',d')$$

E' UNIFORMEMENTE CONTINUA.

<u>Dim.</u> Per ogni $x \in X$, $\varepsilon > 0$, esiste $\delta_x(\varepsilon)$ tale che $d'(f(y), f(x)) < \varepsilon$ se $d(y,x) < \delta_x(\varepsilon)$, $y \in X$. Quindi per ogni $\varepsilon > 0$, $\{B_{x,\frac{1}{2}\delta_x(\frac{\varepsilon}{2})} \,/\, x \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X. Esiste un insieme <u>finito</u> $X_\varepsilon \subset X$ tale che $\{B_{x,\frac{1}{2}\delta_x(\frac{\varepsilon}{2})} \,/\, x \in X_\varepsilon\}$ è un ricoprimento di X. Poniamo

$$(3.8) \qquad \delta(\varepsilon) = \inf\left\{ \tfrac{1}{2}\, \delta_x\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right) \;/\; x \in X_\varepsilon \right\} > 0 \,.$$

Se $x, y \in X$, $d(x,y) < \delta(\varepsilon)$, esiste $x_0 \in X_\varepsilon$ tale che $x \in B_{x_0, \frac{1}{2}\delta_{x_0}(\frac{\varepsilon}{2})}$; la (3.8) e la disuguaglianza triangolare portano a

$$d(x,x_0) < \delta_{x_0}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right); \quad d(y,x_0) < \delta_{x_0}\left(\tfrac{\varepsilon}{2}\right)$$

quindi

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(x_0)) + d'(f(x_0), f(y))$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \quad ,$$

cioè: f è uniformemente continua. $\square$

In particolare sia X compatto metrizzabile, $f \in \mathcal{C}(X)$; allora f è uniformemente continua.

Sia X uno spazio compatto metrizzabile, d una distanza compatibile. X è <u>normale</u> (proposizione 2.8); se $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$, $\overline{B}_{x,\frac{\varepsilon}{2}}$ e $\complement B_{x,\varepsilon}$ sono chiusi disgiunti; per il lemma di Urysohn 2.9, esiste $g_{x,\varepsilon} \in \mathcal{C}(X)$ tale che

$$(3.9) \qquad g_{x,\varepsilon}(x') = \begin{cases} 1 & \text{se } d(x',x) \leq \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 & \text{se } d(x',x) \geq \varepsilon \end{cases}$$

3.9. <u>Proposizione</u>. SE X E' COMPATTO METRIZZABILE, LO SPAZIO TOPOLOGICO $\mathcal{C}(X)$ E' SEPARABILE.

<u>Dim.</u> E' sufficiente costruire $M \subset \mathcal{C}(X)$ <u>numerabile</u> che separa i punti. In tal caso i <u>polinomi</u> negli elementi di M ed M^{*} con coefficienti a parte reale ed immaginaria razionali formano un insieme <u>numerabile</u> denso in $\mathcal{C}(X)$ per il teorema di Stone.

Sia $x_1, x_2, \dots$ una successione densa in X (proposizione 3.6) ed $M = \{ g_{x_i, \frac{1}{n}} \ ; \ i,n \in \mathbb{N} \}$ dove $g_{x,\varepsilon}$ è definita come nell'equazione (3.9) usando una distanza d compatibile con la topologia di X. M è un sottoinsieme numerabile di $\mathcal{C}(X)$ che separa i punti. Infatti se $x,y \in X$, $x \neq y$, è $d(x,y) > \frac{2}{n}$ per un opportuno intero n. Poichè $x_1, x_2, \dots$ è denso esiste un indice i tale che

$$d(y,x_i) < \frac{1}{2n} \ .$$

Allora $d(x,x_i) \geq d(x,y) - d(y,x_i) > \frac{1}{n}$; dunque

$$g_{x_i,\frac{1}{n}}(y) = 1 \ ;$$

$$g_{x_i,\frac{1}{n}}(x) = 0 \ . \qquad \square$$

Sia (X,d) uno spazio metrico compatto. Un insieme $M \subset \mathcal{C}(X)$

è detto <u>equicontinuo</u> se dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta(\varepsilon) > 0$ tale che

$$(3.10) \qquad x,y \in X,\ d(x,y) < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x)-f(y)| < \varepsilon$$

per ogni $f \in M$.

3.10. <u>Proposizione</u> (ASCOLI-ARZELA'). SIA (X,d) UNO SPAZIO METRICO COMPATTO ED $f_1, f_2, \ldots \in \mathcal{C}(X)$ UNA SUCCESSIONE EQUICONTINUA ED EQUILIMITATA: $\sup \{\| f_i \| \ / \ i=1,2,\ldots\} < \infty$. ALLORA ESISTE UNA SOTTOSUCCESSIONE CONVERGENTE IN $\mathcal{C}(X)$.

<u>Dim.</u> Sia E l'insieme numerabile $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_{\frac{1}{n}}$ costruito come nella dimostrazione della proposizione 3.6. Sia $x_1, x_2, \ldots$ una numerazione di E; $i_N(1)$, $i_N(2), \ldots$ una sottosuccessione di $1,2,\ldots$ tale che la successione numerica

$$(3.11) \qquad f_{i_N(1)}(x),\ f_{i_N(2)}(x), \ldots \text{ è convergente per } x \in \{x_1, \ldots, x_N\}.$$

Definiamo induttivamente la successione $i_M(n)$ come una sottosuccessione di $i_{M-1}(n)$ sì che la (3.11) valga per ogni intero N. La sottosuccessione <u>diagonale</u> $f_{i_N(N)}$ converge in ogni $x \in E$. Poniamo $g_N = f_{i_N(N)}$. Poichè le g_N sono equicontinue, dato $\varepsilon > 0$, $\exists$ m_ε tale che

$$(3.12) \qquad d(x,x') < \frac{1}{m_\varepsilon} \Rightarrow |g_n(x)-g_n(x')| < \varepsilon \, , \; n \in \mathbb{N} \, .$$

Poichè $X_{\frac{1}{m_\varepsilon}}$ è <u>finito</u> esiste $N(\varepsilon)$ tale che

$$(3.13) \qquad n,m > N(\varepsilon) \Longrightarrow |g_n(x)-g_m(x)| < \varepsilon \, , \quad x \in X_{\frac{1}{m_\varepsilon}} \, .$$

Sia $x \in X$; poichè $\left\{ B_{x', \frac{1}{m_\varepsilon}} \; ; \; x' \in X_{\frac{1}{m_\varepsilon}} \right\}$ è un <u>ricoprimento</u> di X, esiste $x' \in X_{\frac{1}{m_\varepsilon}}$ con $d(X,X') < \frac{1}{m_\varepsilon}$. Allora da (3.12) (3.13) abbiamo

$$m,n > n_\varepsilon \Rightarrow |g_n(x)-g_m(x)| \leq$$

$$|g_n(x)-g_n(x')| + |g_n(x')-g_m(x')| + |g_m(x')-g_m(x)| < 3\varepsilon$$

Cioè g_n è una successione di Cauchy in $\mathcal{C}(X)$. Poichè $\mathcal{C}(X)$ è <u>completo</u> (paragrafo 3.1 esempio 3) g_n è convergente; poichè g_n è una sottosuccessione di f_n, la Proposizione è dimostrata. $\square$

<u>Esercizio</u>. Sia $\{f_1, f_2, \dots\} \subset \mathcal{C}[0,1]$ un sottoinsieme di funzioni continue dotate di derivata continua, tali che

$$\|f_i\| + \|f_i'\| < K \quad ; \quad i=1,2,\dots$$

dimostrare che esiste una sottosuccessione convergente in $\mathcal{C}([0,1])$.

Uno spazio topologico X è detto <u>sequenzialmente compatto</u> se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente in X.

3.3. <u>Alcuni complementi</u>.

3.11. <u>Proposizione</u>. SIA X UNO SPAZIO TOPOLOGICO METRICO. LE PROPRIETA' SEGUENTI SONO EQUIVALENTI:

(i) X E' COMPATTO

(ii) X E' SEQUENZIALMENTE COMPATTO.

INOLTRE SE E' VERIFICATA (i) O (ii) ALLORA

(iii) X E' SEPARABILE.

<u>Dim</u>.: (i) $\Rightarrow$ (ii) è evidente (cf. par. 2.1, 1.3 e prop. 3.6).

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Mostriamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito $\mathcal{B}_\varepsilon$ di X mediante sfere di diametro minore di ε (uno spazio metrico con tale proprietà si dirà iperlimitato). Infatti, se ciò non fosse, esisterebbe $\varepsilon > 0$ e, per induzione, una successione B_{x_n} di sfere di centro x_n, raggio ε, e $X_{n+1} \notin \bigcup_{i=1}^{n} B_{X_i}$; segue $d(X_n, X_m) \geq \varepsilon$ se $n \neq m$ e la successione X_n non ammetterebbe sottosuccesioni convergenti contraddicendo (ii).

Posto allora $\mathcal{B} = \bigcup_{k=n}^{\infty} \mathcal{B}_{1/k}$, $\mathcal{B}$ è una base numerabile di intorni per la topologia di X, quindi X è separabile.

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sia $\{x_\alpha, \alpha \in A\}$ una succesione generalizzata in X. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ esiste $B_k \in \mathcal{B}_{1/k}$, $\mathcal{B}_{1/k}$ sopra costruito, ed una sottosuccessione generalizzata contenuta in B_k ($\mathcal{B}_{1/k}$ è un insieme finito). Per (ii) la successione dei centri di B_k ammette almeno un punto limite X_0. Per costruzione X_0 è punto limite di $\{X_\alpha, \alpha \in A\}$; segue la compattezza di X.

NOTA: Ragionando come sopra è facile dimostrare che uno spazio metrico è compatto se e solo se è completo e iperlimitato.
Poiché i sotto insiemi di $\mathbb{R}^n$ iperlimitati coincidono con quelli limitati segue: i sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^n$ coincidono con i chiusi e limitati.

3.12. Teorema (ASCOLI - ARZELA'). SIA X METRICO COMPATTO, $M \subset \mathcal{C}(X)$. E' EQUIVALENTE:

(i) M E' COMPATTO.

(ii) M E' CHIUSO LIMITATO ED EQUICONTINUO.

Dim. (ii) $\Rightarrow$ (i) per le proposizioni 3.10, 3.9 e 3.11.

(i) $\Rightarrow$ (ii): basta dimostrare che M è equicontinuo.

Poichè ogni funzione continua su X è uniformemente continua, ad ogni $f \in M$ è associata una funzione $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ \longrightarrow \delta_f(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$ tale che

$$\left| f(x) - f(y) \right| < \varepsilon \quad \text{se} \quad d(x,y) < \delta_f(\varepsilon) \; ; \quad x,y \in X.$$

Poichè $\left| f'(x)-f'(y) \right| \leq \left| f(x)-f(y) \right| + 2\| f-f' \|$

abbiamo

$$\left| f'(x)-f'(y) \right| < \varepsilon \text{ se } \| f-f' \| < \frac{\varepsilon}{4} ; \; d(x,y) < \delta_f(\tfrac{\varepsilon}{2}) \; ; \; x,y \in X.$$

Poichè M è compatto dal ricoprimento aperto $\{ B_{f,\frac{\varepsilon}{4}} \,/\, f \in M \}$ si può estrarre un ricoprimento <u>finito</u> $\{ B_{f,\frac{\varepsilon}{4}} \,/\, f \in M_0 \}$. Poniamo $\delta(\varepsilon) = \inf \{ \delta_f(\frac{\varepsilon}{2}) \,/\, f \in M_0 \}$; poichè M_0 è finito, $\delta(\varepsilon) > 0$ e

$$\left| f(x)-f(y) \right| < \varepsilon \quad \text{se} \quad d(x,y) < \delta(\varepsilon) \qquad \begin{matrix} x,y \in X \\ f \in M. \end{matrix} \qquad \square$$

<u>Esercizio 1</u>. Sia X compatto metrico, d una distanza compatibile. Mostrare che se $\varepsilon > 0$, esiste una <u>partizione dell'unità</u> $\mathcal{G}_\varepsilon \subset \mathcal{C}(X)$: $\mathcal{G}_\varepsilon$ finito e

$\|g\| = 1$, $g(x) \geq 0$ se $x \in X$, $g \in \mathcal{G}_\varepsilon$;

$$\sum_{g \in \mathcal{G}_\varepsilon} g(x) = 1 \quad , \quad x \in X;$$

tale che il supporto di $g \in \mathcal{G}_\varepsilon$ ha diametro $\leq \varepsilon$; $g \in \mathcal{G}_\varepsilon$, $g(x)=1$, $g(y)=0 \Rightarrow d(x,y) > \frac{\varepsilon}{2}$.

(Usare le funzioni $g_{x,\frac{\varepsilon}{2}}$ dell'equazione (3.9), estrarre un ricoprimento finito da $\left\{ \{y \in X / g_{x,\frac{\varepsilon}{2}}(y) > 0\}, x \in X \right\} \ldots$)

Esercizio 2. Dimostrare la Proposizione 3.9 usando l'esercizio 1 ma senza usare il teorema di Stone.

Esercizio 3. Dimostrare l'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (i) del teorema 3.12 direttamente, usando il teorema di Tychonov. (Con $\delta(\varepsilon)$ definito dall'eq.(3.10) e K tale che $\|f\| \leq k$ se $f \in M$, sia $\{x_1, x_2, \ldots\} \subset X$ tale che $\{B_{x_1,\delta(\frac{1}{n})}, \ldots, B_{x_{j(n)},\delta(\frac{1}{n})}\}$ è un ricoprimento; mostrare che

$$f \in M \longrightarrow \{f(x_1), f(x_2) \ldots\} \in \prod_{i=1}^{\infty} \{z / |z| \leq K\} \equiv Y$$

è un omeomorfismo tra M ed un chiuso in Y).

Esercizio 4. Sia K un intervallo chiuso e limitato in R $\mathcal{D}$ (K) l'insieme di tutte le funzioni complesse continue ed in finitamente derivabili su K. Per ogni n sia X_n lo spazio metrico $\mathcal{C}(K)$ con la distanza $d_n(f,g)=\|f-g\|$. Sia (X_0,d_0) lo spazio metrico prodotto (equazione 3.3, esempio 3., par.3.1) e ψ l'applicazione

$$f\in\mathcal{D}(K)\longrightarrow\psi(f)=\{f,f',f'',\dots\}\in X_0$$

cioè $p_n(\psi(f))=f^{(n)}$ (derivata n-esima). Poniamo

$$d(f,g)=d_0(\psi(f),\psi(g))=d(f-g,0)$$
$$f,g\in\mathcal{D}(K).$$

La topologia $\mathcal{T}(d)$ su $\mathcal{D}(K)$ è detta topologia di L.Schwartz. Un insieme $M\subset\mathcal{D}(K)$ è <u>limitato</u> se esiste una successione $C_1,C_2,\dots\in\mathbb{R}$ tale che

$$\|f^{(n)}\|\leq C_n \quad \text{per ogni } f\in M,\ n\in\mathbb{N}.$$

Mostrare che $M\subset\mathcal{D}(K)$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Mostrare che lo spazio metrico $\mathcal{D}(K)$ è completo e separabile.

4. SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI, SPAZI DI BANACH.

4.1. Definizioni; spazi di Fréchet, di Banach, di Hilbert.

Sia X uno spazio vettoriale sui reali; sia $\mathcal{T}$ una topologia di Hausdorff sull'insieme X; diremo che $(X,\mathcal{T})$ è uno spazio vettoriale topologico (S.V.T) reale se le applicazioni

$$(4.1) \qquad \begin{array}{ll} 1. & x,y \in X \times X \longrightarrow x+y \in X \\ 2. & \lambda,x \in \mathbb{R} \times X \longrightarrow \lambda x \in X \end{array}$$

sono continue, dove $\mathbb{R}$ è munito della topologia abituale e gli insiemi prodotto della topologia prodotto.

Un S.V.T. complesso è definito analogamente.

Se $\mathcal{W}(0)$ è una base di intorni dello zero in X, $\mathcal{W}(0)$ ha le due proprietà seguenti:

α. $\mathcal{W}(0)$ determina la topologia di X: se $x_0 \in X$, $\{x_0+W \,/\, W \in \mathcal{W}(0)\}$ è una base di intorni di x_0 (eq.(4.1),1)

β. $\forall\, W \in \mathcal{W}(0)$ è assorbente: se $x \in X$ $\exists \lambda \neq 0$ tale che $\lambda x \in W$.

Sia X uno S.V.T.; possiamo scegliere una base di intorni dell'origine $\mathcal{W}(0)$ tale che valga:

γ. $\forall\, W \in \mathcal{W}(0)$ è equilibrato:

(4.2) $$|\lambda| \leq 1 \Rightarrow \lambda W \subset W$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ se X è reale, $\lambda \in \mathbb{C}$ se X è complesso.

Infatti: sia $\mathcal{U}$ (0) una base di intorni di 0 in X; per ogni $U \in \mathcal{U}(0)$ esiste $W \in \mathcal{U}(0)$ e $\delta > 0$ tali che $\lambda x \in U$ se $x \in W$ e $|\lambda| \leq \delta$ (assioma 2, dell'eq.(4.1)); gli insiemi $\bigcup_{|\lambda| \leq \delta} \lambda$ sono aperti, equilibrati e formano una base di intorni di 0 che è anche stabile per omotetie: $0 < \mu < 1$, $U \in \mathcal{W}(0) \Rightarrow \mu\, U \in \mathcal{W}(0$

Uno spazio vettoriale localmente convesso (SVLC) è uno SVT per cui esiste una base $\mathcal{W}(0)$ di intorni di 0 convessi:

(4.3) $$\text{Se } W \in \mathcal{W}(0) \text{ ed } x, y \in W$$
$$\forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}_+ \text{ con } \alpha + \beta = 1, \quad \alpha x + \beta y \in W.$$

POICHÈ L'INVILUPPO CONVESSO DI UN APERTO È AP

Ragionando come sopra, ogni SVLC ammette una base di intorni di 0 convessi ed equilibrati.

Sia X uno SVT metrizzabile, d una distanza compatibile; la funzione

$$x \in X \longrightarrow d(x,0) = q(x)$$

determina la topologia di X ed esiste una base numerabile di intorni di O. Se inoltre vale

$$(4.4) \qquad d(x,y) = q(x-y) \quad ; \quad x,y \in X$$

allora q è <u>simmetrica</u> e <u>subadditiva</u>:

$$(4.5) \qquad q(x) = q(-x)$$

$$x,y \in X$$

$$(4.6) \qquad q(x+y) \leq q(x) + q(y)$$

e, chiaramente,

$$(4.7) \qquad q(x) = 0 \Rightarrow x = 0 .$$

Se X è uno S.V.T. metrizzabile e $q:X \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione soddisfacente (4.5, 6,7) per cui $d(x,y) = q(x-y)$ è una distanza compatibile con la topologia di X, diremo che q è una <u>quasinorma compatibile</u> per X.

<u>Esercizio 1.</u> Sia X uno spazio vettoriale, $q:X \longrightarrow \mathbb{R}$ una

funzione che soddisfa (4.5,6,7); formulare delle condizioni necessarie e sufficienti su q perchè X munito della topologia $\mathcal{T}(d)$, $d(x,y)=q(x-y)$, sia uno spazio vettoriale topologico.

Una funzione $x\in X \longrightarrow \|x\| \in \mathbb{R}$ su uno spazio vettoriale X è una norma se

$$\begin{aligned} &\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \; ; \quad x,y\in X \\ (4.8) \qquad &\|x\| = 0 \Rightarrow x=0; \\ &\|\lambda x\| = |\lambda|\cdot\|x\| \end{aligned}$$

dove $\lambda\in \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ se X è reale o complesso rispettivamente.

Notare: da (4.8) segue

$$(4.9) \qquad \| x-y\| \geqslant \big| \|x\| - \|y\| \big|$$

in particolare $\|x\| \geqslant 0$.

La coppia $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio normato; $d(x,y)=\|x-y\|$ è una distanza ed $(X,\mathcal{T}(d))$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso; $\mathcal{T}(d)$ è detta topologia della norma.

<u>Esempi.1</u>. Sia K compatto, $\mathcal{C}(K)$ lo spazio vettoriale

delle funzioni complesse continue su K,

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)| , \quad f \in \mathcal{C}(K).$$

Allora $\mathcal{C}$ (K) è uno spazio vettoriale normato.

2. Lo spazio $\mathcal{D}$ (K) dell'es.4 par.3.3, munito della topologia di Schwartz, è uno S.V.L.C. per cui (vedi il seguito) non esiste una norma compatibile.

Particolarmente importanti sono gli S.V.T. metrizzabili completi:

Uno S.V.T.L.C. <u>metrizzabile completo</u> è uno spazio di FRÉCHET;

Uno spazio vettoriale <u>normato completo</u> è uno spazio di BANACH.

Se K è compatto, $\mathcal{C}$ (K) è uno spazio di Banach. Se $K \subset \mathbb{R}$ è un intervallo compatto, $\mathcal{D}$ (K) è uno spazio di Fréchet.

<u>Esercizio 2</u>. Se X è uno S.V.T. ed $M \subset X$, M è <u>limitato</u> se per ogni intorno W di O, esiste $\lambda_W \in \mathbb{R}$ tale $M \subset \lambda_W W$. Mostrare che gli insiemi limitati in $\mathcal{D}$ (K) sono precisamente quelli

definiti nell'esercizio 4. par.3.3. Quali sono gli insiemi limitati in uno spazio normato? Mostrare che ogni compatto in uno S.V.T. è limitato.

Sia X uno S.V. complesso; un prodotto scalare in X è una applicazione $x,y \in X \longrightarrow (y,x) \in \mathbb{C}$ tale che

1. $\overline{(y,x)} = (x,y)$, $x,y \in X$;
2. $(y,\alpha x+\beta x') = \alpha(y,x)+\beta(y,x')$; $x,x',y \in X$; $\alpha,\beta \in \mathbb{C}$;
3. $(x,x) > 0$ se $x \neq 0$, $x \in X$.

Uno spazio prehilbertiano è uno S.V. complesso munito di un prodotto scalare; uno spazio prehilbertiano reale è definito con le ovvie modifiche.

Sia $\mathcal{H}$ prehilbertiano, $x,y \in \mathcal{H}$; $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $(\alpha x+\beta y,\alpha x+\beta y) = |\alpha|^2(x,x)+2\,\mathrm{Re}\,\alpha\bar{\beta}\,(y,x)+|\beta|^2(y,y) \geq 0$
da cui segue che la matrice dei coefficienti

$$\begin{pmatrix} (x,x) & (x,y) \\ (y,x) & (y,y) \end{pmatrix}$$

ha determinante positivo; quindi

$$|(x,y)|^2 \leq (x,x)(y,y) \quad \text{(DISUGUAGLIANZA DI SCHWARTZ)}$$

Segue:

$$(x+y,x+y) = (x,x)+(y,y)+2\,\mathrm{Re}(x,y)$$

$$\leq (x,x) + (y,y) + 2(x,x)^{1/2}\,(y,y)^{1/2} =$$

$$= ((x,x)^{1/2} + (y,y)^{1/2})^2 .$$

Quindi, tenendo conto dei punti 2. e 3. delle definizioni di prodotto scalare, possiamo definire una norma in $\mathcal{H}$ ponendo

$$\|x\| = (x,x)^{1/2} ; \quad x \in \mathcal{H} .$$

Uno spazio prehilbertiano è normato; uno spazio prehilbertiano $\mathcal{H}$ è uno spazio di Hilbert se è completo, cioè se munito della norma $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ $\mathcal{H}$ è uno spazio di Banach.

Dalla definizione di prodotto scalare segue l'identità del parallelogramma: se $\mathcal{H}$ è prehilbertiano,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2); \quad x,y \in \mathcal{H}$$

è l'identità di polarizzazione:

$$(x,y) = \frac{1}{4} \sum_{a^4=1} \| ax + y \|^2$$

Si può dimostrare: se $x \in X \to \|x\|$ è una norma che soddisfa l'identità del parallelogramma, la formula di polarizzazione definisce un prodotto scalare in X. (Vedi p.es.K.YOSIDA, Functional Analysis).

Sia X uno spazio normato, Z l'insieme delle successioni di Cauchy in X (cfr.prop.3.3, dim.). Z è uno spazio vettoriale complesso (o reale, se X lo è); l'insieme Z_0 delle successioni convergenti a zero è un sottospazio e l'insieme delle classi Z/R (cfr.ibid.) coincide con lo spazio vettoriale quoziente $Z/Z_0 =$; $\tilde{d}(\tilde{x},0) = \|\tilde{x}\|$ è una norma in $\tilde{X}$ ed $\tilde{X}$ è uno spazio di Banach; l'immersione ψ di X in $\tilde{X}$ è lineare, isometrica: $\|\psi(x)\| = \|x\|$, $x \in X$.

Se X è prehilbertiano, ed $\mathcal{H}$ il suo completamento, le funzioni $x \in X \to (x,y) \in \mathbb{C}$, $y \in X \to (x,y) \in \mathbb{C}$ sono uniformemente continue (usare la disuguaglianza di Schwartz) quindi esiste uno ed un solo prodotto scalare in $\mathcal{H}$ tale che

$$(\psi(x), \psi(y)) = (x,y) \ , \quad x,y \in X \ ;$$

poichè $\mathcal{Y}(X)$ è denso, anche

$$(x,y) = \| x \|^2 \quad , \quad x \in \mathcal{H} .$$

Il completamento di uno spazio normato è uno spazio di Banach; il completamento di uno spazio prehilbertiano è uno spazio di Hilbert.

<u>Esempi.</u> Sia Y uno spazio topologico, $f \in \mathcal{C}(Y)$; il <u>supporto</u> di f è definito da:

$$\text{supp } f = \overline{\{ y \in Y \ / \ f(y) \neq 0 \}} .$$

Sia Y localmente compatto, $X \subset \mathcal{C}(Y)$ lo S.V. delle funzioni a supporto compatto,

$$\| f \| = \sup_{y \in Y} | f(y) | \ , \quad f \in X .$$

Il completamento dello spazio normato $(X, \|\cdot\|)$ è lo spazio di Banach $\mathcal{C}_0(Y)$.

In particolare sia $Y = \mathbb{R}$; poniamo, per $1 \leq p < \infty$,

$$\|f\|_p = \left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\, dx\right)^{1/p} \quad ; \quad f \in X .$$

Il completamento dello spazio normato $(X,\|\cdot\|_p)$ è lo spazio L^p delle classi delle funzioni misurabili secondo Lebesgue, tali che $\int|g(x)|^p\, dx<\infty$, modulo le funzioni nulle quasi ovunqu In particolare; per $1\leq p<\infty$, L^p è uno spazio di Banach; L^p è Hilbertiano se e solo se $p=2$.

Sia A un insieme qualunque; sia $\ell^2(A)$ lo spazio vettoriale delle funzioni complesse su A tali che

$$\sum_{\alpha\in A}|f(\alpha)|^2 < \infty$$

dunque: se $f\in\ell^2(A)$, $f(\alpha)\neq 0$ sono per una famiglia numerabile di indici (ordinati p.es. ponendo in successione gli insiemi finiti $A_n=\{\alpha\in A/|f(\alpha)|>\frac{1}{n}\}$, $n=1,2,\ldots$); la funzione

$$f\in\ell^2(A)\rightarrow\|f\|=\left(\sum_{\alpha\in A}|f(\alpha)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

è una norma che soddisfa l'identità del parallelogramma; è derivabile dal prodotto scalare

$$(f,g) = \sum_{\alpha\in A}\overline{f(\alpha)}\, g(\alpha) .$$

Dunque $l^2(A)$ è prehilbertiano; è anche completo: se $f_n \in l^2(A)$ è una successione di Cauchy ed $\varepsilon > 0$, per $n,m > n_\varepsilon$ è $\|f_n - f_m\|^2 = \sum_{\alpha \in A} |f_n(\alpha) - f_m(\alpha)|^2 < \varepsilon^2$; dunque, per ogni α, $\{f_n(\alpha)\}$ è di Cauchy; sia $f(\alpha) = \lim_{n \to \infty} f_n(\alpha)$. Poichè, per ogni sottoinsieme finito $A' \subset A$ $\sum_{\alpha \in A'} |f_n(\alpha) - f(\alpha)|^2 = \lim_{m \to \infty} \sum_{\alpha \in A'} |f_n(\alpha) - f_m(\alpha)|^2 \leq \varepsilon^2$, è $f_n - f \in l^2(A)$ e $\|f_n - f\| \leq \varepsilon$; cioè $f = f_n - (f_n - f) \in l^2(A)$ ed $f_n \to f$ in $l^2(A)$.

Dunque $l^2(A)$ è uno spazio <u>di Hilbert.</u>

4.2. Seminorme, spazi localmente convessi e funzionali continui.

Sia X uno spazio vettoriale, $W \subset X$ convesso ed <u>assorbente</u>: $\forall x \in X$, $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+ : x \in \lambda W$. In particolare $0 = \lambda^{-1} 0 \in W$.

Il funzionale di Minkowski p_W è definito da:

$$p_W(x) = \inf \{\lambda \in \mathbb{R}_+ / x \in \lambda W\} \quad ; \qquad x \in X.$$

chiaramente: $p_W(x) \geq 0$, $p_W(0) = 0$;

se $p_W(x) < 1$, $x \in W$; se $x \in W$, $p_W(x) \leq 1$.

<u>Se X è una S.V.T. e W è aperto</u>, inoltre:

$$p_W(x) < 1 \Leftrightarrow x \in W .$$

Infatti $p_W(x) = \left[\sup \phi_x^{-1}(W)\right]^{-1}$ dove:

$$\phi_x \quad : \lambda \in \mathbb{R} \longrightarrow \phi_x(\lambda) = \lambda x \in X \quad \text{è continua.}$$

4.1. <u>Proposizione</u> SIA $W \subset X$ CONVESSO ASSORBENTE; ALLORA

$$(4.10) \qquad p_W(x+y) \leq p_W(x) + p_W(y)$$

$$(4.11) \qquad p_W(\lambda x) = \lambda\, p_W(x) \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,\ x,y \in X .$$

SE W E' EQUILIBRATO, PER OGNI λ NEL CORPO DEGLI SCALARI

$$(4.12) \qquad p_W(\lambda x) = |\lambda|\, p_W(x) \quad , \quad x \in X .$$

<u>Dim.</u> Sia $x,y \in X$; $\varepsilon > 0$. Per definizione,

$$(p(x)+\varepsilon)^{-1} x = w_1 \in W, \ (p(y)+\varepsilon)^{-1} y = w_2 \in W ;$$

dunque $x+y=(p(x)+p(y)+2\varepsilon)(\alpha w_1+\beta w_2)$ con $\alpha,\beta \geq 0$, $\alpha+\beta=1$; poichè W è convesso, $\alpha w_1+\beta w_2 \in W$ e $p(x+y) \leq p(x)+ +p(y)+2\varepsilon$ da cui la (4.10). La (4.11) è ovvia se $\lambda=0$; se $\lambda>0$, $p_W(\lambda x)=\inf\{\lambda\mu \,/\, \mu\in \mathbb{R}_+, \lambda x \in \lambda\mu W\} = \lambda p_W(x)$. Se W è equilibrato e $\lambda \neq 0, |\lambda|W=\lambda W$ e $p_W(\lambda x)=\inf\{|\lambda|\mu \,/\, \mu \in \mathbb{R}_+, \lambda x \in |\lambda|\mu W\} = |\lambda|\, p_W(x)$. $\square$

Se X è uno S.V. e $p: X \to \mathbb{R}$ diremo che p è una <u>seminorma</u> se

$$
(4.12) \qquad \begin{aligned} & p(x+y) \leq p(x)+p(y) \quad ; \quad x,y\in X \\ & p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \quad ; \quad \lambda \text{ scalare}; \quad x\in X. \end{aligned}
$$

Sia X uno S.V. e Π una famiglia di seminorme su X; $\mathcal{C}(\Pi)$ è la topologia definita dalla subbase di aperti

$$
W_{p,\varepsilon}(x) = \{x'\in X \,/\, p(x-x')<\varepsilon\}; \quad x\in X; \; p\in\Pi; \; \varepsilon>0.
$$

Diremo che Π è una <u>subbase</u> di seminorme per X. $\mathcal{C}(\Pi)$ è di Hausdorff se e solo se

$$
(4.12') \qquad x\in X,\; p(x)=0 \;\; \forall p\in\Pi \;\Rightarrow\; x=0 .
$$

Diremo che Π è una <u>base di seminorme</u> per $X, \mathcal{T}$ se $\mathcal{T} = \mathcal{T}($

e

$$p \in \Pi,\ \lambda \in \mathbb{R}_+ \Longrightarrow \lambda p \in \Pi$$

$$p_1, p_2 \in \Pi,\ \exists\, p \in \Pi : p_1(x) \leq p(x)$$
$$p_2(x) \leq p(x)\ , \quad x \in X.$$

4.2. <u>Teorema</u> X E' UNO S.V.L.C. SE E SOLO SE LA SUA TOPOLOGIA E' DEFINITA DA UNA BASE DI SEMINORME, CHE SODDISFA LA COND.(4.1

SE Π E Π' SONO BASI DI SEMINORME PER LE TOPOLOGIE $\mathcal{T}$ E $\mathcal{T}'$ E' EQUIVALENTE:

(i) $\mathcal{T} < \mathcal{T}'$

(ii) $\forall p \in \Pi,\ \exists\, p' \in \mathcal{T}' : p(x) \leq p'(x),\ x \in X.$

<u>Dim.</u> Osserviamo che se Π_o è una famiglia di seminorme, se ne può dedurre una base Π per $\mathcal{T}(\Pi_o)$ prendendo l'insieme dei multipli positivi delle <u>somme finite</u> di Π_o (equivalentemente: dei <u>supremi</u> di sottoinsiemi finiti di Π_o).

Se Π è una base di seminorme, una base di intorni di 0 per $\mathcal{T}(\Pi)$ è data da

$$\mathcal{W}_{\Pi}(0) = \{ W_p /\ p \in \Pi \};$$

$$W_p = \{ x \in X / p(x) < 1 \}.$$

Per definizione $x+\mathcal{W}_{\Pi}(0)$ è una base di intorni di x; se λ, λ_o sono scalari e $x, x_o \in X$, $p \in \Pi$, è

$$p(\lambda x-\lambda_o x_o) \leq |\lambda| p(x-x_o)+|\lambda-\lambda_o| p(x_o)$$

e ciò prova che le proprietà (4.1) valgono per $(X, \mathcal{T}(\Pi))$. Inoltre, W_p è convesso per le (4.12).

Se X è uno S.V.L.C. sia $\mathcal{W}(0)$ una base invariante per omotetie di intorni di O convessi ed equilibrati; è immediato che i funzionali di Minkowski

$$\Pi = \{p_W / W \in \mathcal{W}(0)\}$$

forniscono una base di seminorme Π per $\mathcal{T}$ come richiesto: poichè $W \in \mathcal{W}(0)$ è aperto, $p_W(x)<1$ è equivalente a $x \in W$ (cfr. prop.4.1 e l'osservazione che la precede).

L'implicazione (ii) $\Rightarrow$ (i) è banale; per (i) $\Rightarrow$ (ii) basta osservare che $\mathcal{T}<\mathcal{T}' \Leftrightarrow \forall$ intorno convesso equilibrato W dello zero per $\mathcal{T}$ contiene un intorno convesso equilibrato W' dello zero per $\mathcal{T}'$: quindi

$$p_{W'}(x) < 1 \Rightarrow p_W(x) < 1 .$$

Sia $\varepsilon > 0$, segue $p_W((p_{W'}(x)+\varepsilon)^{-1}x) < 1$ cioè (4.12)

$$p_W(x) < p_{W'}(x)+\varepsilon , \qquad x \in X.$$

Poichè ε è arbitrario, segue $p_W \leq p_{W'}$. $\square$

Un <u>funzionale lineare</u> è un'applicazione F di X nel corpo degli scalari ($\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) tale che

$$F(\alpha x+\beta y) = \alpha F(x)+\beta F(y); \qquad x,y \in X .$$

4.3. <u>Proposizione</u> SIA X UNO S.V.L.C., F UN FUNZIONALE LINEARE; SIA Π UNA BASE DI SEMINORME PER LA TOPOLOGIA DI X. E' EQUIVALENTE

(i) F E' CONTINUO;

(ii) ESISTE $p \in \Pi$ TALE CHE

$$|F(x)| \leq p(x) , \qquad x \in X .$$

<u>Dim</u>. (ii) $\Rightarrow$ (i) è evidente. (i) $\Rightarrow$ (ii): $x \in X \rightarrow |F(x)|$ è una seminorma continua per X, quindi ci riduciamo all'implica

zione (i) $\Rightarrow$ (ii) del teorema 4.2. $\square$

Uno S.V.L.C. con una base numerabile di intorni di O, è <u>metrizzabile</u>: esiste una base numerabile di intorni <u>convessi equilibrati</u> di O quindi una subbase numerabile di seminorme: $p_1, p_2, \ldots$ allora

$$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{p_n(x)}{1 + p_n(x)} \tag{4.13}$$

definisce una quasinorma compatibile: se $d(x,y)=q(x-y)$ la topologia $\mathcal{T}(d)$ coincide con la topologia di X, per un argomento visto più volte (parte III).

In uno spazio normato un funzionale lineare è continuo se e solo se è <u>limitato</u>:

$$|F(x)| \leq c \cdot \|x\| \quad , \qquad x \in X$$

<u>Esercizio</u> 1. Mostrare che se F è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{D}(K)$, esiste un intero N e una costante C tali che

$$|F(f)| \leq C \left(\int_K |f^{(N)}(x)|^2 \, dx \right)^{1/2},$$

per ogni f che si annulli con tutte le sue derivate agli estremi dell'intervallo K.

<u>Esercizio</u> 2. Sia $\mathcal{S}$ il sottospazio di $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ delle funzioni f tali che $x \longrightarrow (1+x^2)^N f^{(M)}(x) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$; $\forall N,M \in \mathbb{N}$. Definiamo una subbase di seminorme in $\mathcal{S}$: se (a_N,b_N) è una numerazione delle coppie di interi,

$$p_N(f) = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| (1+x^2)^{a_N} f^{(b_N)}(x) \right| \quad ; \qquad f \in \mathcal{S};$$

mostrare che, nella metrica definita dalla quasinorma (4.13), $\mathcal{S}$ è completo. Mostrare che $\mathcal{S}$ è separabile. Mostrare che, se F è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{S}$, esistono interi N,M e una costante C tali che

$$\left| F(f) \right| \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}} \left| f^{(N)}(x) \right|^2 (1+x^2)^M dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

I funzionali lineari continui su $\mathcal{S}$ sono detti <u>distribuzioni temperate</u>.

<u>Esercizio</u> 3. Sia $X = \mathcal{S}$ o $\mathcal{D}(K)$, $t_0 \in \mathbb{R}$ o $t_0 \in K$ risp.: se N è un intero positivo, mostrare che

$$F(x) = x^{(N)}(t_0) \quad , \quad x \in X$$

è un funzionale continuo.

<u>Esercizio</u> 4. Sia K un intervallo compatto in $\mathbb{R}$, $\mathcal{D}_K \subset \mathcal{S}$ il sottospazio delle funzioni per cui

$$\operatorname{supp} f \subset K \ .$$

Mostrare che $\mathcal{S}$ e $\mathcal{D}(K)$ inducono la medesima topologia su $\mathcal{D}_K$, e per essa $\mathcal{D}_K$ è di Fréchet (mostrando che $\mathcal{D}_K$ è chiuso in $\mathcal{D}(K)$).

<u>Esercizio</u> 5. Sia $\mathcal{D} = \cup\{\mathcal{D}_K / K$ intervallo compatto$\}$ $= \cup\{\mathcal{D}_{[-n,n]} / n \in \mathbb{N}\}$. Per definizione, $U \subset \mathcal{D}$ è aperto se $U \cap \mathcal{D}_K$ è aperto in $\mathcal{D}_K$ per ogni intervallo compatto K.

Mostrare che $\mathcal{D}$ è uno S.V.L.C. (attenzione: non vi sono basi numerabili di intorni di O).

Mostrare che F è un funzionale lineare continuo su $\mathcal{D}$ se e solo se tale è la sua restrizione

$$F\big|_{\mathcal{D}_K} \ , \ \forall K \text{ intervallo compatto} \subset \mathbb{R} \ .$$

4.3. Spazi vettoriali in dualità

Siano X,Y spazi vettoriali entrambi reali od entrambi complessi; diremo che X,Y sono <u>in dualità</u> se è data una forma bilineare a valori rispettivamente reali o complessi,

$$x,y \in X \times Y \longrightarrow \langle y,x \rangle$$

tale che

$$x \in X,\ \langle y,x\rangle = 0\quad \forall y \in Y \implies x=0\ ;$$
$$y \in Y;\ \langle y,x\rangle = 0\quad \forall x \in X \implies y=0\ .$$

La topologia $\sigma(X,Y)$ su X è per definizione la topologia debole definita dalle funzioni (par.1.4)

$$x \in X \longrightarrow \langle y,x\rangle\ ;\quad y \in Y\ ;$$

munito di $\sigma(X,Y)$, X è uno SVLC ed una <u>base di seminorme</u> è data da

$$\left\{ P_{\mathcal{Y}} \,/\, \mathcal{Y} \subset Y \ \underline{\text{finito}} \right\} \quad \text{dove:}$$

$$P_{\mathcal{Y}}(x) = \sum_{y \in \mathcal{Y}} \left| \langle y,x\rangle \right| . \tag{4.14}$$

4.4. Proposizione: SIANO X,Y S.V. IN DUALITA', F UN FUNZIONALE LINEARE SU X; LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI:

(i) $\exists$ $y \in Y$ TALE CHE $F(x) = \langle y,x \rangle$; $x \in X$.

(ii) F E' $\sigma(X,Y)$-CONTINUO.

Dim.: (i) $\Rightarrow$ (ii) è ovvio. Per la prop.4.3, (ii) $\Longrightarrow$ esiste $\mathcal{Y} \subset Y$ finito tale che

$$(4.15) \qquad |F(x)| \leqslant P_{\mathcal{Y}}(x) \quad , \quad x \in X .$$

Sia $\mathcal{Y} = (y_1,\dots,y_n)$; da (4.15) segue: $\langle y_i,x \rangle = 0$, $i=1,\dots,n$ $\Rightarrow$ $F(x)=0$. Quindi, se M è il sottospazio di $V = \mathbb{R}^n$ ($V=\mathbb{C}^n$ se abbiamo S.V. complessi) generato dai vettori $(\langle y_1,x \rangle,\dots,\langle y_n,x \rangle)$, $x \in X$, esiste un funzionale lineare f su M tale che

$$\begin{tikzcd} x \in X \arrow[r] \arrow[dr] & (\langle y_1,x \rangle,\dots,\langle y_n,x \rangle) \in M \arrow[d, dashed, "f"] \\ & F(x) \end{tikzcd}$$

sia commutativo.

Ma ogni tale f è dato da un vettore $\lambda \in V$ mediante la formula: $f((c_1,\dots,c_n)) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i$; dunque

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \langle y_i,x \rangle = \langle y,x \rangle . \quad \Box$$

4.4. Teorema di Hahn-Banach

4.5. Proposizione: SIA X UNO S.V. REALE, $p:X \longrightarrow \mathbb{R}$ UNA FUNZIONE TALE CHE

$$p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$$

$$(4.16) \qquad p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad ; \quad x,y \in X, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+ \quad .$$

SIA $M \subset X$ UN SOTTOSPAZIO ED f UN FUNZIONALE LINEARE DEFINITO SU M TALE CHE

$$f(x) \leqslant p(x) \quad , \quad x \in M$$

ALLORA ESISTE UN FUNZIONALE LINEARE F SU X TALE CHE

$$(4.17) \qquad F\big|M = f \ ;$$

$$(4.18) \qquad F(x) \leqslant p(x) \quad , \quad x \in X \ .$$

Dim. Parte A: sia $X=M+\mathbb{R}\cdot x_0$, $x_0 \notin M$. Definiamo un funzionale f_α su X, $\alpha \in \mathbb{R}$, ponendo:

$$f_\alpha(x+\lambda x_0) = f(x)+\alpha\lambda \ ; \quad x \in M, \quad \lambda \in \mathbb{R} \ .$$

Basta mostrare che esistono valori di α per cui

$$(4.19) \qquad f(x)+\alpha\lambda \leqslant p(x+\lambda x_0) \ , \qquad x\in M, \quad \lambda\in \mathbb{R} \ .$$

Poichè per $\lambda=0$ la (4.19) vale per ipotesi, basta dimostrare che, se $\mu > 0$, valgono le relazioni

$$\left.\begin{array}{l} f(x)+\alpha\mu \leqslant p(x+\mu x_0) \\ f(x)-\alpha\mu \leqslant p(x-\mu x_0) \end{array}\right\} \quad x\in M, \ \mu>0$$

Per la (4.16) e la linearità di f basta, ponendo $y=\frac{x}{\mu}$,

$$-p(-x_0+y)+f(y) \leqslant \alpha \leqslant p(x_0+y)-f(y) \quad .$$

Perchè esista un tale $\alpha\in\mathbb{R}$ occorre e basta che

$$(4.10) \qquad -p(-x_0+y)+f(y)\leqslant p(x_0+y')-f(y') \ ; \ y,y'\in M;$$

cioè $f(y+y')\leqslant p(x_0+y')+p(-x_0+y)$; poichè $f(y+y')\leqslant p(y+y')$ per ipotesi e per la (4.16) $p(y+y')=p(y'+x_0+y-x_0)\leqslant p(x_0+y')+p(-x_0+y)$ la (4.20) è dimostrata, dunque esiste $\alpha\in\mathbb{R}$ per cui la (4.19) vale.

Parte B: Sia A l'insieme delle coppie (N,g) dove; $N \subset X$ è un sottospazio contenente M; g è un funzionale lineare definito su N tale che

$$g \big| M = f \quad ;$$
$$g(x) \leqslant p(x); \quad x \in N \ .$$

Definiamo un ordine parziale in A ponendo:

$$(4.21) \qquad \begin{aligned} &(N,g) < (N',g') \qquad \text{se} \\ &N \subset N' \ ; \quad g' \big| N = g \ . \end{aligned}$$

Sia $B \subset A$ un sottoinsieme linearmente ordinato; mostriamo che esiste un estremo superiore di B in A.

Poniamo

$$\mathcal{N} = \cup \left\{ N \ / \ (N,g) \in B \right\} \ ;$$

se $x \in \mathcal{N}$, sia $(N,g) \in B$ tale che $x \in N$; poniamo

$$G(x) = g(x) \ .$$

Poichè B è linearmente ordinato, $G(x)$ non dipende dalla scelta

scelta di (N,g). Chiaramente

$$(\mathcal{N},G) \in A \quad ;$$

$$(\mathcal{N},G) > (N,g) \quad \text{se} \quad (N,g) \in B \quad .$$

Per il lemma di Zorn segue che A possiede un elemento massimale, $(\mathcal{M},F)$. Mostriamo che $\mathcal{M}=X$. Altrimenti esiste $x_0 \in X \setminus \mathcal{M}$ posto $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M} + \mathbb{R}\, x_0$, la costruzione della parte A applicata ad F fornisce un funzionale F_1 per cui

$$(\mathcal{M},F) < (\mathcal{M}_1,F_1)$$

ciò è assurdo perchè $\mathcal{M} \neq \mathcal{M}_1$ e $(\mathcal{M},F)$ è massimale in A. Segue che $\mathcal{M}=X$ ed F soddisfa le (4.17), (4.18). $\square$

4.6. <u>Osservazione</u>: Se nella prop.4.4, p è una seminorma cioè $p(x)=p(-x)$, $x \in X$, allora da (4.18) segue

$$|F(x)| \leq p(x) \quad , \qquad x \in X$$

poichè $F(-x)=-F(x)$ per linearità.

4.7. <u>Teorema</u>: SIA X UNO S.V. COMPLESSO, p UNA SEMINORMA, M UN SOTTOSPAZIO DI X. PER OGNI FUNZIONE LINEARE $f:M \to \mathbb{C}$ TALE CHE

$$(4.22) \qquad \left| f(x) \right| \leqslant p(x) \quad , \quad x \in M$$

ESISTE UN FUNZIONALE LINEARE $F: X \longrightarrow \mathbb{C}$ TALE CHE

$$(4.23) \qquad F \Big| M = f \quad ; \quad \left| F(x) \right| \leq p(x), \qquad x \in X \quad .$$

Dim. Poniamo $g(x) = \mathrm{Re}\ f(x)$, $x \in M$; g è un funzionale lineare reale sullo S.V. reale M, e soddisfa la (4.22). Per l'osservazione 4.6 esiste un funzionale G lineare reale sullo S.V. reale X tale che

$$G \Big| M = g \quad ; \quad \left| G(x) \right| \leqslant p(x) \quad , \quad x \in M \ .$$

Poniamo $F(x) = G(x) - i\ G(ix)$. F è lineare per la struttura di S.V. reale di X; mostriamo che è lineare per la struttura di S.V. complesso: basta $F(ix) = i\ F(x)$, $x \in X$. Infatti

$$F(ix) = G(ix) - i\ G(-x) = i\ G(x) + G(ix) = i(G(x) - i\ G(ix)) = \\ = i\ F(x)$$

Poichè $f(x) = \mathrm{Re}\ f(x) + i\ \mathrm{Im} f(x) = \mathrm{Re}\ f(x) - i\ \mathrm{Re}\ f(ix) = g(x) - ig(ix)$, $F \big| M = f$. Basta mostrare la seconda delle (4.23). Sia $x \in X$ e poniamo

$$F(x) = e^{iv} |F(x)|$$

allora $F(e^{-iv}x) = |F(x)|$ è reale quindi

$$|F(x)| = G(e^{-iv}x) \leq p(e^{-iv}x) = p(x)$$

poichè p è una seminorma. $\square$

4.8. <u>Teorema</u>. SIA X UNO S.V.L.C. REALE, K UN INSIEME CONVESSO CHIUSO IN X CONTENENTE 0. PER OGNI $x_o \notin K$ ESISTE UN FUNZIONALE LINEARE CONTINUO SU X TALE CHE

$$f(x_o) > 1 \quad ; \quad f(x) < 1 \ , \quad x \in K \ . \tag{4.24}$$

<u>Dim.</u> Poichè $\complement K$ è aperto e $x_o \in \complement K$ esiste un intorno V di 0 tale che $x_o + V \subset \complement K$; poichè X è uno S.V.L.C. V si può scegliere convesso ed equilibrato. Da $x_o + V \cap K = \emptyset$ segue

$$x_o + \frac{1}{2} V \cap K + \frac{1}{2} V = \emptyset \ . \tag{4.25}$$

Sia $U = K + \frac{1}{2} V$; U è aperto (perchè unione di aperti); U è convesso: $\alpha(K_1 + \frac{1}{2} v_1) + \beta(K_1 + \frac{1}{2} v_2) = \alpha K_1 + \beta K_2 + \frac{1}{2} (\alpha v_1 + \beta v_2) \in U$

se $K_1, K_2 \in K$, $v_1, v_2 \in V$ e $\alpha+\beta=1$; $\alpha,\beta>0$. Dalla (4.25) segue $x_0 \notin \overline{U}$. Sia $M = \mathbb{R}\cdot x_0$ e P_U il funzionale di Minkowski di U (cfr. prop.4.1); definiamo

$$f_0 : \lambda x_0 \in M \longrightarrow \lambda p_U(x_0) \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} .$$

Chiaramente $f_0(x_0)=p_U(x_0)>1$ perchè $x_0 \notin \overline{U}$; $f_0(x) \leq p_U(x)$ se $x \in M$ Sia f un funzionale lineare su X tale che $f/M = f_0$ e (prop.4.5)

$$(4.26) \qquad f(x) \leq p_U(x) \quad , \quad x \in X .$$

Per definizione $p_U(x) < 1$ se $x \in U$ quindi la (4.24) è soddisfatta Poichè f è lineare dalla (4.26) segue

$$\left| f(x) \right| \leq (p_U(x) + p_U(-x)) = p(x)$$

quindi f è continuo. $\square$

4.9. <u>Corollario</u> . SIA X UNO S.V.L.C. COMPLESSO, K UN CONVESSO CHIUSO IN X CONTENENTE O; SE $x_0 \notin K$ ESISTE UN FUNZIONALE LINEARE CONTINUO SU X TALE CHE

$$\mathrm{Re}\, f(x_0) > 1 \; ; \; \mathrm{Re}\, f(x) < 1 \; , \; x \in K .$$

<u>Dim.</u> Evidente. $\square$

4.10. <u>Corollario</u>. SIANO X, K, x_0 COME NEL TEOREMA 4.8 SALVO L'IPOTESI $0 \in K$; ESISTE UN FUNZIONALE LINEARE CONTINUO f SU X ED $\alpha \in \mathbb{R}$ TALI CHE

$$(4.27) \qquad f(x_0) > \alpha \; ; \quad f(x) < \alpha \, , \quad x \in K \; .$$

<u>Dim.</u> Il teorema 4.8 applicato a $x_0 - x_1$, $K - x_1$ con x_1 fissato in K fornisce un funzionale f per cui vale la (4.24); se $\alpha = 1 + f(x_1)$, segue la (4.27). $\square$

4.5. <u>Spazio duale di uno S.V.L.C.; topologia debole; teorema del bipolare</u>.

Sia $(X, \mathcal{T})$ uno S.V.L.C., X' l'insieme di tutti i funzionali lineare continui (di X negli scalari di X); se $f, g \in X'$, ed α, β sono scalari, $\{\alpha f + \beta g : x \in X \to \alpha f(x) + \beta g(x)\} \in X'$ quindi X' è uno S.V. reale o complesso secondo che X è reale o complesso.

Lo S.V. X' è detto duale topologico di X.

La forma bilineare

$$f \in X', \ x \in X \longrightarrow \langle f,x \rangle = f(x) \ .$$

pone in dualità (par.4.3.) X ed X'. Infatti, se $\langle f,x \rangle = 0$ $\forall x \in X$, f=0 per definizione. Se $x \in X$, $x \neq 0$, gli enunciati 4.8 e 4.9 applicati a $x_o = x$, $K = \{0\}$ dicono che esiste $f \in X'$, con $f(x) \neq 0$.

La topologia debole di X è per definizione la $\sigma(X,X')$ topologia.

La topologia $*$-debole di X' è per definizione la $\sigma(X',X)$ topologia.

Evidentemente,

$$\sigma(X,X') < \mathcal{T} \tag{4.28}$$

Dalla proposizione 4.4. e dalla definizione di duale X', abbiamo:

4.11. Proposizione. UN FUNZIONALE LINEARE SU X E' CONTINUO SE E SOLO SE E' DEBOLMENTE CONTINUO.

Siano X,Y S.V. in dualità; se $E \subset X$, il polare di E in Y è definito da

$$E^{\circ} = \left\{ y \in Y \;/\; \mathrm{Re}\langle y,x\rangle \leq 1,\ x \in E \right\} ; \tag{4.29}$$

dove la "parte reale" è superflua se X,Y sono reali.

Per definizione $E \subset E^{\circ\circ}$.

Chiaramente, E° è <u>convesso</u> $\sigma(Y,X)$-chiuso, contenente 0.

In particolare se $E \subset X$, X S.V.L.C., il polare E° in X' è $*$-debolmente chiuso; se $F \subset X'$, il polare F° in X è debolmente chiuso. Se $E \subset X$, $\overline{E}^{\circ} = E^{\circ}$.

4.12. <u>Teorema</u>. (Teorema del bipolare).

SIA X UNO S.V.L.C. E $K \subset X$ CONVESSO CONTENENTE L'ORIGINE; LA CHIUSURA DI K NELLA TOPOLOGIA INIZIALE COINCIDE CON LA CHIUSURA DEBOLE DI K E SI HA

$$\overline{K} = \overline{K}^{deb} = K^{\circ\circ} \tag{4.30}$$

DOVE I POLARI SI RIFERISCONO ALLA DUALITA' TRA X ED X'.

<u>Dim.</u> Poichè $\overline{K} \subset \overline{K}^{\circ\circ} = K^{\circ\circ}$ e $K^{\circ\circ}$ è debolmente chiuso basta $K^{\circ\circ} \subset \overline{K}$. Se $x \notin \overline{K}$ gli enunciati 4.8 e 4.9 mostrano che esiste $f \in X'$ tale che $\mathrm{Re}\langle f,x\rangle < 1$, $x \in \overline{K}$, cioè $f \in \overline{K}^{\circ} = K^{\circ}$, e $\mathrm{Re}\langle f,x_0\rangle > 1$ cioè $x_0 \notin K^{\circ\circ}$ $\square$

4.13. <u>Corollario</u>. SIA $(X,\mathcal{T})$ UNO S.V.L.C.; I CHIUSI CONVESSI SONO GLI STESSI PER $\mathcal{T}$ E PER $\sigma(X,X')$.

<u>Dim.</u> Per entrambe le topologie, $E\subset X$ è chiuso se e solo se, fissato $x'\in X$, $x'+E$ è chiuso; quindi basta ridursi ai convessi contenenti l'origine ed applicare il Teorema 4.12. $\square$

Se $E\subset X$ è un sottospazio vettoriale,

$$E^{\circ}=E^{\perp}=\left\{f\in X' \,/\, \langle f,x\rangle=0,\quad x\in E\right\}$$

poichè $\mathrm{Re}\,\langle y,\lambda x\rangle\leq 1\quad\forall\lambda \;\Rightarrow\; \langle y,x\rangle=0$; dunque $E^{\circ}=E^{\perp}$ è un <u>sottospazio vettoriale</u>.

<u>4.14. Corollario</u>. SIA $E\subset X$ UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE; ALLORA

$$\overline{E}=\overline{E}^{deb}=E^{\perp\perp} \tag{4.31}$$

IN PARTICOLARE: LE FAMIGLIE DEI SOTTOSPAZI CHIUSI E DEBOLMENTE CHIUSI COINCIDONO; UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE CHIUSO E' INTERSEZIONE DI NUCLEI DI FUNZIONALI CONTINUI:

$$\mathcal{N}(f)=f^{-1}(\{0\}),\quad f\in X'.$$

4.15. Teorema SIA X UNO S.V.L.C., f ED f' FUNZIONALI LINEARI SU X; ALLORA

(i) f ED f' SONO PROPORZIONALI $\Longleftrightarrow \mathcal{N}(f)=\mathcal{N}(f')$

(ii) $f\in X' \Longleftrightarrow \mathcal{N}(f)$ E' CHIUSO.

Dim. Basta supporre $\mathcal{N}(f)\neq X$. Per (i): $\exists\ x_0\in X$, $f(x_0)=1$; $\forall x\in X$, $x=x-f(x)x_0+f(x)x_0=x'+f(x)x_0$, $x'\in\mathcal{N}(f)$; se $\mathcal{N}(f')\supset\mathcal{N}(f)$, $f'(x)=f'(x_0)f(x)$, $f'(x_0)\neq 0$.

Per (ii): se $f\in X'$, $\mathcal{N}(f)$ è chiuso perchè controimmagine continua di un chiuso. Sia f lineare, $\mathcal{N}(f)$ chiuso $\neq X$. Per il Corollario 4.14 $\exists\ f'\in X'$, $\mathcal{N}(f')\supset\mathcal{N}(f)$, $f'\neq 0$. Il ragionamento precedente mostra che $f=\lambda f'\in X'$. $\square$

4.6. Insiemi $*$-debolmente compatti: teorema di Alaoglu; topologia forte del duale.

4.16. Teorema (ALAOGLU). SIA X UNO S.V.L.C., W UN INTORNO CONVESSO ED EQUILIBRATO DI O IN X. IL POLARE W° DI W IN X' E' $\sigma(X',X)$ COMPATTO.

In altre parole: detto p il funzionale di Minkoswki di W l'insieme

$$(4.32) \qquad \left\{ f \in X' \;/\; |f(x)| \leq p(x),\; x \in X \right\} = W^\circ$$

è $*$debolmente compatto.

<u>Dim.</u> Se $x \in W$, $p(x) < 1$ quindi $|f(x)| \leq p(x), x \in W \Rightarrow \mathrm{Re}\langle f, x\rangle \leq$ $\Rightarrow f \in W^\circ$. Poichè, se $\varepsilon > 0$, $x \in X$ $(p(x)+\varepsilon)^{-1} x \in W$, $\mathrm{Re}\langle f,x\rangle \leq$ $p(x)+\varepsilon$ $\forall f \in W^\circ$; poichè W è equilibrato segue $|\langle f,x\rangle| \leq p(x)$ e ciò verifica l'identità (4.32).

Per $\forall\, x \in X$ sia $K_x = \{z \in \mathbb{C} \;/\; |z| \leq p(x)\}$; K_x è compatto nella topologia abituale, quindi lo spazio topologico prodotto

$$K = \prod_{x \in X} K_x$$

è <u>compatto</u> (Teorema 2.1). Definiamo

$$(4.33) \quad \psi : W^\circ \to K \;;\; [\psi(f)](x) = f(x) \in K_x ; \quad x \in X \;;$$

chiaramente $\psi(W^\circ)$ è l'insieme degli elementi in K che definiscono un funzioanle lineare (che sarà automaticamente continuo perchè denominato dalla seminorma p), cioè:

$$\psi(W^\circ) = \bigcap_{\substack{x,y \in X \\ \alpha,\beta \in \mathbb{C}}} \left(P_{\alpha x+\beta y} - \alpha P_x - \beta P_y\right)^{-1}(\{0\}) \tag{4.34}$$

poichè le proiezioni P_x sono continue per definizione, $P_{\alpha x+\beta y} - \alpha P_x - \beta P_y : K \longrightarrow \mathbb{C}$ è continua e l'immagine inversa dello zero è chiusa; quindi $\psi(W^\circ)$ è chiuso in K, e dunque compatto. Per definizione delle topologie ψ è aperta; poichè è biunivoca, W° è compatto (Teorema 2.5). $\square$

Munito della topologia $*$-debole, X' è uno S.V.L.C. il cui duale è X (proposizione 4.4); vi è un'altra topologia molto importante su X', per cui ciò non è vero in generale.

Sia $B \subset X$ un insieme limitato, $f \in X'$; f è limitato su B: gli insiemi $\{x / |f(x)| < N\}$ sono immagini omotetiche di un intorno di O, quindi uno di essi contiene B (par.4.1., esercizio 2). La topologia forte di X' è definita dalla famiglia di seminorme

$$\{P_B \ / \ B \subset X \text{ limitato}\}$$

$$P_B(f) = \sup_{x \in B} |\langle f,x \rangle| \quad ; \quad f \in X' . \tag{4.35}$$

Poichè un insieme finito è limitato, la topologia forte è più

chiusi "
forte della topologia $\mathcal{H}$ -debole. Una base di "intorni chiusi" di O per la topologia forte di X' è:

$$\{ B^\circ \ / \ B \subset X \ \text{limitato} \} \ .$$

Sia $\mathcal{T}'$ la topologia forte di X'; abbiamo dunque

$$\mathcal{T}' > \sigma(X',X)$$

e per conseguenza (prop.4.4)

$$X = (X', \sigma(X',X))' \subset (X', \mathcal{T}')' \quad ;$$

se si ha uguaglianza, X si dirà <u>semiriflessivo</u>, se inoltre la topologia di X conicide con la topologia forte di $(X',\mathcal{T}')'$, X è <u>riflessivo</u>.

4.7. Convessi compatti in uno S.V.L.C.: Teorema di KREIN-MILMAN; teorema del punto fisso di MARKOV-KAKUTANI.

Sia X uno S.V.L.C., $K \subset X$ convesso e compatto. Per $f \in X'$, la funzione reale continua

$$x \in X \longrightarrow \mathrm{Re}\langle f,x\rangle$$

assume un massimo su K (corollario 2.4), sia esso α.
L'iperpiano M di equazione

$$\mathrm{Re}\langle f,x\rangle = \alpha$$

è tangente a K nel senso che

$$(4.36)\ \left\{x_1,x_2 \in K,\ \alpha x_1+\beta x_2 \in M;\quad \alpha>0,\ \beta>0,\ \alpha+\beta=1\right\} \Rightarrow x_1,x_2 \in M;$$

inoltre $M \cap K$ è convesso; un convesso $F \subset K$ con la proprietà (4.32) sarà detto una faccia di K.
Dunque $M \cap K$ è una faccia compatta di K.
Se K non si riduce ad un punto esiste un iperpiano tangente M

tale che $M\wedge K\neq K$: sia $x_1, x_2 \in K$, $x_1\neq x_2$; basta scegliere $f\in X'$ tale che $f(x_2-x_1)=1$ (par.4.5) e $M=\{x/\mathrm{Re}\langle f,x\rangle = \alpha\}$, dove α è il massimo su K di $\mathrm{Re}\langle f,x\rangle$; se $x_2\in M\wedge K$, $\mathrm{Re}\langle f,x_1\rangle = \alpha -1$, $x_1\notin M\wedge K$.

Se $F\subset K$ è una faccia ed $F'\subset F$ è una faccia del convesso F, segue dalla definizione che F' è una faccia di K. Se $\{x\}$ è una faccia di K, x è un <u>punto estremale</u>.

L'argomento precedente mostra che ogni faccia chiusa minimale in K coicide con un punto estremale.

4.17. <u>Teorema</u> (KREIN-MILMAN) SIA X UNO S.V.L.C., $K\subset X$ CONVESSO E COMPATTO.

(i) OGNI IPERPIANO TANGENTE A K CONTIENE UN PUNTO ESTREMALE.

(ii) K E' GENERATO DALL'INSIEME Extr(K) DEI SUOI PUNTI ESTREMALI: L'INVILUPPO CONVESSO DI Extr(K) E' DENSO IN K.

<u>Dim.</u> Per (i): sia M un iperpiano tangente a K; mostriamo che $F=M\wedge K$ contiene una faccia chiusa minimale, quindi un punto estremale. Sia $\mathcal{Y}$ l'insieme delle facce chiuse di K contenute in F, parzialmente ordinato per inclusione. Per il lemma di Zorn basta dimostrare che, se $\mathcal{L}\subset\mathcal{Y}$ è <u>linearmente</u> ordinato ($F_1,F_2\in\mathcal{L}\Rightarrow$ $F_1\subset F_2$

oppure $F_2 \subset F_1$) esiste $F_0 \in \mathcal{F}$ contenuta in ogni elemento di $\mathcal{L}$. Usiamo di nuovo la compatezza di K: $\mathcal{L}$ ha la proprietà dell'intersezione finita perchè è linearmente ordinato per inclusione, quindi $\bigcap \mathcal{L} \equiv F_0 \neq \emptyset$. Ma F_0 è una faccia chiusa. Quindi (Zorn) $\mathcal{F}$ possiede un elemento minimale cioè M contiene un punto estremale di K.

Per (ii): sia K_0 l'inviluppo convesso di Extr(K) (cioè: K_0 è il più piccolo convesso in X contenente Extr(K); ovvero: K_0 è l'insieme delle combinazioni convesse finite di elementi di Extr(K)); basta supporre $0 \in K_0$. Per il teorema 4.12 dobbiamo dimostrare

$$K \subset K_0^{\circ\circ}$$

poichè da $K_0 \subset K$ segue comunque $K_0^{\circ\circ} \subset K$. Dunque basta

$$K_0^{\circ} \subset K^{\circ} \quad . \tag{4.37}$$

Sia $f \in K_0^{\circ}$ cioè: $f \in X'$,

$$\mathrm{Re} \langle f,x \rangle \geq 1 \quad , \quad x \in K_0 \ . \tag{4.38}$$

Sia β il ~~minimo~~ massimo della funzione reale continua $x \longrightarrow \mathrm{Re}\langle f,x\rangle$ sul compatto K. Dobbiamo mostrare $f \in K^\circ$ cioè $\beta \geqslant 1$. Ma l'iperpiano di equazione $\mathrm{Re}\langle f,x\rangle = \beta$ è tangente a K quindi (parte (i)) contiene $x_o \in \mathrm{Extr}(K) \subset K_o$; dunque dalla (4.38) segue

$$\beta = \mathrm{Re}\langle f,x_o\rangle \geqslant 1 \quad . \quad \square$$

Una proprietà importantissima dei convessi compatti in uno S.V.L.C. è la <u>proprietà del punto fisso</u> espressa dal seguente

4.18. <u>Teorema</u> (SCHAUDER-TYCHONOV) SIA X UNO S.V.L.C., $K \subset X$ CONVESSO E COMPATTO. OGNI FUNZIONE CONTINUA $f:K \longrightarrow K$ HA UN PUNTO FISSO IN K; CIOE' $\exists\, x_o \in K$,

$$f(x_o) = x_o \ .$$

(Per <u>la dimostrazione:</u> vedi N.Dunford, J.T.Schwartz: Linear Operators I, capitolo V par.10).

Il teorema citato si riferisce ad una singola trasformazione continua di K in sè, non necessariamente lineare. Il teorema di punto fisso che segue si riferisce ad una famiglia arbitraria, purchè commutativa (eq.4.40) di trasformazioni lineari di K in sé.

4.19. Teorema (MARKOV-KAKUTANI). SIA X UNO S.V.T., $K\subset X$ CONVESSO COMPATTO. SIA Φ UNA FAMIGLIA DI APPLICAZIONI LINEARI CONTINUE DI X IN SE' TALE CHE

$$(4.39)\qquad TK\subset K; \quad T\in\Phi$$

$$(4.40)\qquad T_1T_2\,x = T_2T_1\,x \quad ; \quad T_1,T_2\in\Phi, \quad x\in X .$$

ALLORA ESISTE UN PUNTO FISSO x_o IN K COMUNE A TUTTI GLI ELEMENTI DI Φ :

$$T\,x_o = x_o \quad ; \quad T\in\Phi .$$

Dim. Per $T\in\Phi$, $n\in\mathbb{N}$, sia

$$T^{(n)} = \frac{1}{n+1}(I + T + \ldots + T^n) \; ;$$

poniamo $K_{n,T}=T^{(n)}K$; $\mathcal{K}=\{K_{n,T}/n\in\mathbb{N},\ T\in\Phi\}$.
Poichè K è convesso, $K_{n,T}\subset K$ (4.39); dalla (4.40) segue

$T_1^{(n)}T_2^{(m)}K = T_2^{(m)}T_1^{(n)}K$ quindi

$$K_{n,T_1} \cap K_{m,T_2} \supset T_1^{(n)}T_2^{(m)}K \quad . \tag{4.41}$$

Poichè K è compatto e $T \in \Phi$ continua, $\mathcal{K}$ è una famiglia di chiusi in K con la proprietà dell'intersezione finita, da (4.41). Segue

$$\cap \mathcal{K} \neq \emptyset .$$

Sia $x_o \in \cap \mathcal{K}$. Per $T \in \Phi$ mostriamo $T\, x_o = x_o$. Basta mostrare:
$\forall$ U intorno di O in X, $T\, x_o - x_o \in U$.
Poichè $x_o \in \cap \mathcal{K}$, esiste $x_N \in K$ tale che

$$x_o = \frac{1}{N} \ (I+T+\ldots+T^N)\ x_N$$

da cui $T\, x_o - x_o = \frac{1}{N}\ (T^{N+1}x_N - x_N) \in \frac{1}{N}\ (K-K)$.
Basta dunque mostrare che $\frac{1}{N}\ (K-K) \subset U$ per N opportuno. Ma K-K è compatto perchè immagine continua del compatto $K \times K$ (teorema 2.1 e postulati 1., 2., par.4.1); dunque K-K è <u>limitato</u> ($\{nU/n \in \mathbb{N}\}$ è un ricoprimento di X perchè U è assorbente, par.4.1) ed $\exists$ N

per cui $K-K \subset NU$. $\square$

Notare: nell'ultimo teorema non è stato necessario supporre X localmente convesso.

4.8. Spazi normati e di Banach; immersione nel biduale, topologie deboli e teorema di KREIN-ŠMULIAN.

Sia X uno S.V., $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie di X determinate dalle norme $\|\cdot\|, \|\cdot\|'$; dal teor.4.2 segue:

$$(4.42) \quad \mathcal{T} < \mathcal{T}' \Leftrightarrow \exists\, K>0 : \|x\| \leq K\|x\|', \ \forall x \in X ;$$

quindi anche

$$(4.42') \quad \mathcal{T} < \mathcal{T}' \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Se } \{x_n / n \in \mathbb{N}\} \subset X, \quad x_n \to 0 \ (\mathcal{T}') \\ \Rightarrow \ x_n \longrightarrow 0 (\mathcal{T}) . \end{cases}$$

Se $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$ le due norme sono dette equivalenti.

4.20. Proposizione SIA X UNO S.V. NORMATO; SE DIM $X = n < \infty$,

X E' OMEOMORFO A $\mathbb{C}^n$. OGNI SPAZIO NORMATO A DIMENSIONE FINITA E' DI BANACH; OGNI SOTTOSPAZIO A DIMENSIONE FINITA DI UNO SPAZIO NORMATO E' CHIUSO.

<u>Dim.</u> Basta la prima asserzione. Sia $e_1,\dots,e_n$ una base per lo S.V. X, $\|x\|$ la norma di X e

$$\|x\|_o = \left(\sum_{i=1}^{m}|x_i|^2\right)^{1/2} \quad \text{se} \quad x = \sum_{i=1}^{m} x_i e_i \ ;$$

chiaramente $\|x\| \leq \sum_{i=1}^{m}|x_i| \, \|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^{m}\|e_i\|^2\right)^{1/2}\|x\|_o$, dalla disuguaglianza di Schwartz. Quindi $\mathcal{T}<\mathcal{T}_o$ per (4.42). Ma la palla unità di $\mathbb{C}^n$ è compatta quindi

$$X_1^{(0)} = \left\{x \in X \ / \ \|x\|_o \leq 1\right\} \quad \text{è} \quad \mathcal{T}_o\text{- compatto}.$$

Poichè $\mathcal{T}$ è di Hausdorff, $\mathcal{T}=\mathcal{T}_o$ su $X_1^{(0)}$ (Coroll.2 .6). Mostriamo che $\mathcal{T}_o<\mathcal{T}$ usando (4.42').

Sia $x_n \in X$, $x_n \to 0$ $(\mathcal{T})$; se $x_n \not\to 0(\mathcal{T}_o)$ passando a una sottosuccessione possiamo supporre $\|x_n\|_o \geq \delta > 0$. Allora $y_n = \|x_n\|_o^{-1} x_n \in X_1^{(0)}$, $y_n \to 0(\mathcal{T})$, $\|y_n\|_o = 1$: assurdo perchè su $X_1^{(0)}$ è $\mathcal{T} = \mathcal{T}_o$. $\square$

Esercizio: ripetere il ragionamento supponendo che X sia uno S.V.L.C.

4.21. *Lemma.* Sia X S.V. normato, $M \subset X$ sottospazio *chiuso*; $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ x_\varepsilon \in X$, tale che

$$\|x_\varepsilon\| = 1 \quad ; \quad d(x_\varepsilon, M) > 1-\varepsilon. \tag{4.43}$$

Dim. Se $d(x,M)=0$, $x \in M$ perchè M è chiuso; quindi esiste $x \in X$: $d(x,M)=d>0$. Per definizione, $\exists\ x' \in M$ tale che

$$\|x - x'\| < d(1-\varepsilon)^{-1}$$

quindi $x_\varepsilon = \|x-x'\|^{-1}(x-x')$ soddisfa:

$$\|x_\varepsilon\| = 1 \ ; \ d(x_\varepsilon, M) = \|x-x'\|^{-1} d(x-x', M) = d(x,M)\|x-x'\|^{-1} > 1$$

$\square$

Osservazione: Dal Lemma e dalla Prop.4.20 segue:

Uno spazio normato *localmente compatto* ha dimensione finita.

Esercizio 2. Dimostrare che uno S.V.L.C. localmente compatto ha dimensione finita.

Sia X uno S.V. normato. Dalla Prop.4.3., $f \in X'$ se e solo se $\exists K > 0$:

$$(4.44) \qquad |\langle f,x\rangle| \leq K \|x\| \quad , \quad x \in X \quad ;$$

l'estremo inferiore $\|f\|$ dei numeri K per cui la (4.44) vale è

$$\|f\| = \sup \{ |\langle f,x\rangle| \ / \ x \in X, \ \|x\| \leq 1 \} = p_{X_1}(f)$$

(cfr.eq.4.3) ed è una <u>norma</u> su X' che definisce la <u>topologia forte</u> di X': ogni limitato di X è contenuto infatti in $N X_1$ per un intero N.

4.22. <u>Proposizione</u>. IL DUALE FORTE X' DI UNO SPAZIO NORMATO X E' UNO SPAZIO DI BANACH.

<u>Dim</u>. Sia f_n una successione di Cauchy in X', allora $\|f_n\|$ è limitata, $\|f_n\| < C$. Poichè

$$(4.45) \qquad |\langle f_m - f_n, x\rangle| \leq \|f_n - f_m\| \cdot \|x\| < \varepsilon \|x\|$$

$$\text{se } \ n,m > n_\varepsilon$$

$\lim \langle f_n, x\rangle = f(x)$ esiste e definisce un funzionale lineare. Poichè $|f(x)| = \lim |\langle f_n,x\rangle| \leq C\|x\|$, $f\in X'$; da (4.45) passando al limite per $n\to\infty$, $\|f_m - f\| < \varepsilon$ se $m > n_\varepsilon$; cioè f_n è convergente ad f ed X' è <u>completo</u>. $\square$

Sia X'' il duale forte dello spazio di Banach X'; se $x\in X$, è

$$|\langle f,x\rangle| \leq \|x\|\cdot\|f\| \qquad f\in X'$$

quindi ponendo

$$\langle j(x), f\rangle = \langle f,x\rangle \quad , \quad f\in X'$$

abbiamo un'applicazione lineare $j: X \to X''$ tale che $\|j(x)\| \leq \|x\|$; j è detta l'<u>immersione canonica del biduale</u> in quanto:

4.23. <u>Proposizione</u>. L'IMMERSIONE CANONICA DI UNO SPAZIO NORMATO X NEL BIDUALE E' ISOMETRICA.

<u>Dim.</u> Basta mostrare che esiste $f\in X'$, $\|f\| = 1$ tale che $\langle f,x\rangle = \|x\|$. Sia M il sottospazio $\mathbb{C}\cdot x$ di X, $f_0 : M \to \mathbb{C}$ definito da

$$f_0(\lambda x) = \lambda\|x\| .$$

Chiaramente $\|f_0\| = 1$. Per il teorema di Hahn-Banach 4.6 esiste una estensione f di f_0 ad X come richiesto. $\square$

Poichè X" è uno spazio di Banach segue: la chiusura di $j(X)$ è isometricamente isomorfa al completamento di X (vedi Cap.III e par.4.1).

Se X è completo, $j(X)$ è chiuso in norma in X"; la chiusura <u>$*$-debole</u> è data invece (teorema del bipolare) da

$$(4.46) \qquad \overline{j(X)} = j(X)^{\perp\perp} = X''$$

poichè $j(X)^{\perp} = \{f \in X' / \langle j(x), f\rangle = \langle f, x\rangle = 0,\ x \in X\} = \{0\}$.

Quindi: l'immersione di uno spazio di Banach nel biduale è chiusa in norma ma $*$-debolmente densa; $j(X)$ è l'insieme dei funzionali lineari $*$-debolmente continui per X', ma <u>non</u> esaurisce i funzionali continui in norma su X', se X non è riflessivo. Uno spazio normato quasi riflessivo è riflessivo.

<u>Esempio</u>. Sia $X = \ell_0(\mathbb{N})$ = spazio vettoriale delle successioni complesse che tendono a zero. Sappiamo che X è uno spazio

di Banach con la norma

$$\| x \| = \operatorname{Sup} |x_n| \ .$$

Sia $e_n \in X$: $(e_n)_i = \delta_{in}$; si ha

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} x_n e_n \ , \quad x \in X \ ;$$

se $f \in X'$,

$$\langle f, x \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \langle f, e_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n x_n$$

da cui facilmente: $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| = \|f\|$, e $f \longrightarrow (\lambda_0, \lambda_1, \dots)$ definisce una isometria lineare di X' <u>su</u> $\ell^1(\mathbb{N})$. Analogamente si vede che se $\xi \in X''$,

$$\langle \xi, f \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \xi_n \lambda_n \ ,$$

$$\| \xi \| = \operatorname{Sup}_n |\xi_n| ,$$

definisce una isometria lineare di X'' sullo spazio di Banach $\mathcal{C}_B(\mathbb{N})$ delle successioni complesse <u>limitate</u>.

Vi è una importante topologia sul duale X' di uno spazio di Banach X, che è intermedia tra la topologia $*$-debole e la topologia forte, per la quale le forme $f \in X' \longrightarrow \langle f,x \rangle$, $x \in X$, <u>esauriscono</u> le forme lineari continue. Per introdurla, osserviamo che $X' = \bigcup \{ X'_n \ / \ n=1,2,\dots \}$ dove $X'_n = \{ f \in X' \ / \ \| f \| \leq n \}$; sia $\mathcal{T}_n$ la topologia indotta su X'_n dalla topologia $*$-debole. La topologia che ci interessa è il "limite induttivo" delle topologie $\mathcal{T}_n$: $U \subset X'$ è aperto se $\forall n$, $U \cap X'_n$ è un aperto di $\mathcal{T}_n$. In tale topologia, come è facile vedere, se una successione generalizzata è convergente esiste una sottosuccessione generalizzata <u>limitata</u> convergente.(*)

Diamo una definizione diversa di tale topologia, da cui è evidente che con essa X' diviene uno S.V.L.C.; successivamente (Prop.4.26) mostriamo che le due definizioni coincidono.

<u>Definizione</u>. La <u>topologia B $*$-debole</u> di X' ("BX topology") è la topologia $\mathcal{T}_B$ determinata dalle seminorme

$$(4.47) \qquad p_A(f) = \sup \{ | \langle f,x \rangle | \ / x \in A \} \ ; \ A \subset X \text{ numerabile e convergente a zero}$$

(*) una successione <u>ordinaria</u> $*$-debolmente convergente è sempre limitata, vedi Cap.V, teorema di BANACH-STEINHAUS.

Se A è **finito**, p_A è una seminorma della topologia $*$ debole; quindi

(4.48) $$\sigma(X',X) < \mathcal{T}_B < \mathcal{T}'.$$

Le topologie $\sigma(X',X)$ e $\mathcal{T}_B$ coincidono sugli insiemi limitati: $A_\varepsilon = \{x \in A / \| x \| > \varepsilon\} \subset A$ è finito (cfr.(4.47)) quindi se $f \in X'_n$, vale $p_A(f) \leq p_{A_\varepsilon}(f) + n\varepsilon$.

4.24. **Proposizione**. SE F E' UN FUNZIONALE B $*$-DEBOLMENTE CONTINUO SUL DUALE X' DI UNO SPAZIO DI BANACH X, ESISTE $x_F \in X$ TALE CHE

$$\langle f, x_F \rangle = F(f) \quad , \quad f \in X'.$$

Dim. Esiste (Proposizione 4.3) $A \subset X$ numerabile convergente a zero tale che

(4.40) $$|F(f)| \leq p_A(f) \quad , \quad f \in X' .$$

se $A = (a_1, a_2, \ldots)$, $\forall f \in X'$ è $\langle f, a_i \rangle \longrightarrow 0$ per $i \to \infty$.
Quindi $\hat{f} = \{\langle f, a_1 \rangle , \langle f, a_2 \rangle , \ldots\} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{N})$ e per la (4.49)

$$\left| F(f) \right| \leq \|\hat{f}\|_{c_0(\mathbb{N})}$$

dunque $g_F : \hat{f} \to F(f)$ definisce un funzionale lineare e continuo. Pertanto $\exists \Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots) \in \ell^1(\mathbb{N}) = c_0(\mathbb{N})'$, tale che $g_F(\hat{f}) = \langle \Lambda, \hat{f} \rangle$, cioè:

$$F(f) = \langle \Lambda, \hat{f} \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle f, a_i \rangle \lambda_i = \langle f, x_F \rangle$$

dove $x_F = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i$ converge nella norma di X. $\square$

Le topologie $\sigma(X', X)$ e $\mathcal{T}_B$ hanno dunque gli stessi funzionali lineari continui e quindi (par.4.5) gli stessi <u>convessi chiusi</u>

4.25. <u>Teorema</u>. (KREIN-ŠMULIAN). SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, $M \subset X'$ CONVESSO; E' EQUIVALENTE:

(i) M E' $*$-DEBOLMENTE CHIUSO

(ii) $M \cap X'_\lambda$ E' $*$-DEBOLMENTE CHIUSO PER $\forall \lambda > 0$, DOVE:

$X'_\lambda = \{ f \in X' \ / \ \|f\| \leq \lambda \}$.

4.26. <u>Proposizione</u>. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH; LA TOPOLOGIA B-$*$-DEBOLE DI X' DEFINITA DALLE SEMINORME (4.47) COINCIDE CON LA TOPOLOGIA DEFINITA DAGLI APERTI:

(4.50) $U \subset X'$; $\forall \lambda > 0$, $U \cap X'_\lambda$ E' APERTO NELLA TOPOLOGIA $*$-DEBOLE RELATIVA IN X'_λ ;

cioè: U è aperto se $\forall \lambda > 0$ $\exists$ U_λ aperto nella topologia $*$-debole tale che $U_\lambda \cap X'_\lambda = U \cap X'_\lambda$.

<u>Dim.</u> Basta dimostrare la proposizione 4,26. Siano

(4.51) $$W(A) = \{ f \in X' \ / \ p_A(f) < 1 \}$$

gli intorni di 0 in X' determinati dalle seminorme (4.47). Basta dimostrare che

(i) $W(A)$ soddisfa la (4.50).

(ii) Se U soddisfa la (4.50) e $0 \in U$, $\exists$ $A \subset X$ numerabile convergente a zero tale che

$$W(A) \subset U .$$

Per (i): se $f \in X'_\lambda$ è $|\langle f, x\rangle| < 1$ per $\|x\| < \frac{1}{\lambda}$; quindi $W(A) \cap X'_\lambda = W(A_{\frac{1}{\lambda}}) \cap X'_\lambda$ dove $A_{\frac{1}{\lambda}} = \{ x \in A \ / \ \|x\| \geq \frac{1}{\lambda} \}$ è <u>finito</u> quindi $W(A) \cap X'_\lambda$ è $*$ debolmente aperto in X'_λ .

b)

Per (ii): Per ogni $n=1,2,\dots$ sia

$$
(4.52) \qquad \begin{aligned} & B_n \subset X \,, \quad B_n \text{ finito} \,, \\ & \| x \| < \frac{1}{n} \quad \text{per} \quad x \in B_n \,, \qquad n \geq 1 \end{aligned}
$$

Posto $A = \bigcup_{n=0,1,2,\dots} B_n$, $A_N = \bigcup_{n \leq N-1} B_n$, $A \subset X$ è una successione convergente a 0; vogliamo costruire $B_0, B_1, B_2, \dots$ tali che

$$
W(A) \subset U \quad ;
$$

per ciò basta

$$
W(A) \cap X'_N \subset U \cap X'_N \quad ; \qquad N=1,2,\dots
$$

Per la (4.52) abbiamo

$$
W(A) \cap X'_N = W(A_N) \cap X'_N
$$

perchè $\left| \langle f,x \rangle \right| < 1$ se $\|f\| \leq N$, $\|x\| < \frac{1}{N}$.

Il teorema sarà dunque dimostrato se costruiamo gli insiemi B_n

della (4.52) in modo tale che

(4.53) $$W(A_N)\cap X'_N \subset U\cap X'_N \quad , \quad N=1,2\ldots;$$

Ciò è possibile per N=1: poichè $U\cap X'_1$ è aperto nella topo_ logia indotta su X'_1 da $\sigma(X',X)$, $\exists$ B_o finito $\subset$ X tale che $W(B_o)\cap X'_1 \subset U\cap X'_1$. Poichè $W(B_o)=\{f\in X'/\ |\langle f,x\rangle|<1, x\in B_o\}$, modificando B_o in $(1+\varepsilon)B_o$ se necessario, possiamo supporre che

$$\{f\in X'/\ |\langle f,x\rangle|\leq 1 \ \text{ per } \ x\in B_o\}\cap X'_1 = F(B_o)\cap X'_1 \subset U\cap X'_1 .^{(1)}$$

Supponiamo $B_o,B_1,\ldots B_{N-1}$ costruiti con le proprietà (4.52) e, posto $A_N=\bigcup_{n<N} B_n$, tali che

(4.54) $$F(A_N)\cap X'_N \subset U\cap X'_N ;$$

basta costruire B_N con le proprietà (4.52) e tale che

(4.55) $$F(A_N\cup B_N)\cap X'_{N+1} \subset U\cap X'_{N+1} ;$$

se ciò è possibile potremo costruire tutti i $B_o,B_1,B_2,\ldots$ per

---

(1) Avendo posto, per brevità, $F(A)=\{f\in X'/\ |\langle f,x\rangle|\leq 1 \text{ per } x\in A\}$.

induzione con le proprietà (4.52) e (4.54) da cui, poichè $W(A) \subset F(A)$, segue la relazione voluta (4.53).

Sia $K = X'_{N+1} \setminus U \cap X'_{N+1} = X'_{N+1} \cap \complement U$; per il teorema di Alaoglu (4.16) X'_{N+1} è $*$-debolmente compatto; $K \subset X'_{N+1}$ è chiuso quindi compatto. Supponiamo per assurdo impossibile trovare $B \subset X$ finito con (4.52) e (4.55); ciò significa

$$F(A_N \cup B) \cap K \neq \emptyset$$

ogni B come in (4.52). Poichè $F(A \cup B) = F(A) \cap F(B)$, ciò implica che la famiglia di chiusi in K

$$\mathcal{F} = \left\{ F(A_N \cup B) \cap K \ / \ B \subset X \text{ finito; } \|x\| < \frac{1}{N} \text{ per } x \in B \right\}$$

ha la proprietà dell'intersezione finita; poichè K è compatto segue $\bigcap \mathcal{F} \neq \emptyset$.

Sia $f_0 \in \bigcap \mathcal{F}$; $f_0 \in K \Rightarrow f_0 \notin U \cap X'_{N+1}$; ma anche $f_0 \in F(A_N) \cap X'_N \subset U \cap X'_N$ per la (4.54) (ipotesi di induzione); il che è assurdo. $\square$

4.27. <u>Corollario</u>. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, $M \subset X'$ UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE. E' EQUIVALENTE:

(i) M E' $*$-DEBOLMENTE CHIUSO;

(ii) $M \cap X'_1$ E' $*$-DEBOLMENTE CHIUSO.

<u>Dim</u>. $M \cap X'_\lambda = \lambda\, M \cap X'_1$ perchè M è un sottospazio; segue dunque dal teor.4.25. $\square$

4.28. <u>Corollario.</u> SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, $X_1 = \{x \in X \,/\, \|x\| \leq 1\}$ E' EQUIVALENTE:

(i) X_1 E' DEBOLMENTE COMPATTO.

(ii) X E' RIFLESSIVO.

<u>Dim</u>. (ii) $\Rightarrow$ (i): teorema di Alaoglu. Per (i) $\Rightarrow$ (ii): se X_1 è debolmente compatto $j(X_1)$ è $*$-debolmente compatto; ma $j(X_1) = (j(X))_1$ perchè j è isometrica; quindi $(j(X))_1$ è $*$-debolmente chiuso da cui (Coroll.precedente) $j(X)$ è $*$-debolmente chiuso. Poichè $j(X)$ è denso in X'' nella topologia $*$-debole (eq.4.46) segue

$$j(X) = X'' \quad . \quad \square$$

Vale anche:

<u>Eberlein-Smulian</u>: equiv:

(i) X è rifl

(ii) X_1 è sequenzialmente deb-compatto

<u>Esempio:</u> Gli spazi L^p sono riflessivi per $1<p<\infty$; L^1 ed $(L^1)'=L^\infty$ non sono riflessivi (vedi NAIMARK, I 6).

Sia $E \subset X'$ un sottospazio vettoriale; per $x \in X$, $j(x)\big|_E$ è l'elemento dello spazio di Banach E' dato da

$$f \in E \to \langle j(x)\big|_E\, , f\rangle = \langle j(x), f\rangle = \langle f, x\rangle.$$

4.29. <u>Teorema</u>. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, $E \subset X'$ UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE. E' EQUIVALENTE:

(i) E E' $*$-DEBOLMENTE DENSO IN X'.

(ii) $E^\perp = \{0\}$ IN X.

Dim. Immediata conseguenza del teorema del bipolare.

Note 1. Abbiamo studiato una topologia su X' più forte della $\sigma(X',X)$ topologia ma tale che il duale di X' sia X. In generale se X,Y sono S.V. in dualità, una topologia $\mathcal{T}$ di S.V.L.C. su X ha le stesse forme lineari continue di $\sigma(X,Y)$ se e solo se $\sigma(X,Y)<\mathcal{T}<\tau(X,Y)$, dove $\tau(X,Y)$ è la "topologia di Mackey" (vedere TREVES capitolo 36).

2. La caratterizzazione 4.37 dei sottospazi $\mathcal{X}$-debolmente chiusi di X' si generalizza al caso in cui X è uno spazio di Fréchet (vedi TREVES capitolo 37).

4.9. Spazi di Banach separabili. Spazi di Banach di funzioni continue; quoziente di spazi di Banach, duali di quozienti.

4.30. Lemma. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, K LO SPAZIO COMPATTO DI HAUSDORFF $(X'_1, \sigma(X',X))$; X E' ISOMETRICAMENTE ISOMORFO AD UN SOTTOSPAZIO CHIUSO DI $\mathcal{C}(K)$.

Dim. L'applicazione $x \in X \longrightarrow \varphi(x) = j(x)\big|_{X'_1} \in \mathcal{C}(K)$ è lineare ed isometrica: $\| j(x)\big|_{X'_1} \| = \sup\{|\langle f,x\rangle| \;/\; f \in X'_1\} = \|x\|$ (Prop.4.23). Quindi $\varphi(X) \subset \mathcal{C}(K)$ è un sottospazio completo dunque chiuso. $\square$

4.31. Lemma. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, $E \subset X$ UN SOTTOINSIEME, ED M IL SOTTOSPAZIO CHIUSO GENERATO DA E. LE TOPOLOGIE DEBOLI DETERMINATE DA E E DA M SU X' COINCIDONO SU X'_1 (e su tutti gli insiemi limitati).

Dim. Detto M_o il sottospazio vettoriale di X generato da E, osserviamo che $\sigma(X',M_o)$ coincide con la topologia debole di E. Poichè $E \subset M_o$, basta dimostrare che la seconda è più forte. Sia $x \in M_o$; allora $x = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$; $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$,

$x_1,\dots,x_n \in E$; sia $K=\sup\{|\alpha_i| \,/\, i=1,\dots,n\}$; è

$$p_{\{x\}}(f) = |\langle f,x\rangle| \leq \sum_{i=1}^{m} |\alpha_i|\,|\langle f,x_i\rangle| \leq K \sum_{i=1}^{m} |\langle f,x_i\rangle|$$

dunque (teorema 4.2) $\sigma(X',M_0)$ è più debole dunque coincide con la topologia debole di X' definita da E.

Poichè $M_0 \subset M=\overline{M}_0$, $\sigma(X',M_0) < \sigma(X',M)$; basta mostrare che $\sigma(X',M_0) > \sigma(X',M)$ sulle parti limitate, cioè $\forall x \in M$ $\exists\, x_0 \in M_0$ tale che

$$\forall f \in X_1', |\langle x_0,f\rangle| < 1 \Rightarrow |\langle x,f\rangle| < 1 . \tag{4.56}$$

Sia $x_0 \in M$, $\|\frac{1}{2}x_0 - x\| < \frac{1}{2}$; poichè per $f \in X_1'$, $|\langle x,f\rangle| \leq |\langle \frac{1}{2}x_0 - x,f\rangle| + \frac{1}{2}|\langle x_0,f\rangle| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}|\langle x_0,f\rangle|$, segue la (4.56). $\square$

4.32. <u>Teorema</u>. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH; LE CONDIZIONI SEGUENTI SONO EQUIVALENTI:

(i) X E' SEPARABILE;

(ii) X_1' MUNITA DELLA TOPOLOGIA $*$-DEBOLE, E' METRIZZABILE.

<u>Dim</u>. Se $K=(X_1', \sigma(X',X))$ è metrizzabile, $\mathcal{C}(K)$ è separabile (Prop.3.9); per la proposizione 3.5, ogni sottospazio di $\mathcal{C}(K)$ è separabile, e tale è X per il Lemma (4.30); dunque (ii) $\Rightarrow$ (i).

Se X è separabile esiste una successione $x_1, x_2, \ldots$ densa in X; sia M il sottospazio vettoriale da esso generato; una sub base di seminorme per la topologia $\sigma(X',M)$ è data da (Lemma 4.31).

$$P_i(f) = |\langle f, x_i \rangle| \; ; \qquad i=1,2,\ldots$$

dunque $\sigma(X',M)$ è metrizzabile; poichè $(X_1', \sigma(X',M))=(X_1', \sigma(X',X))$ per il lemma 4.31, abbiamo anche (i) $\Rightarrow$ (ii). $\square$

Sia X uno spazio di Banach, $M \subset X$ un sottospaizo vettoriale chiuso. Per ogni $x \in X$, $m \in M$ è

$$d(x,M) = d(x+m,M)$$

quindi, se X/M è lo spazio vettoriale quoziente, la funzione di X/M in $\mathbb{R}_+$

$$\|\xi\| = d(x,M) \quad ; \quad x \in \xi \in X/M \tag{4.57}$$

è ben definita. Chiaramente $\|\xi\| = 0 \Rightarrow \xi = 0$, $\|\lambda\xi\| = |\lambda|\cdot\|\xi\|$ inoltre

(4.58) $$\|\xi\| = \inf\{\|x\| \,/\, x \in \xi\}$$

quindi se $\xi_1, \xi_2 \in X/M$, esistono $x_1 \in \xi_1$, $x_2 \in \xi_2$ tali che $\|x_1\| < \|\xi_1\| + \varepsilon$, $\|x_2\| < \|\xi_2\| + \varepsilon$; segue

$$\|\xi_1 + \xi_2\| \leq \|x_1 + x_2\| < \|\xi_1\| + \|\xi_2\| + 2\varepsilon;$$

poichè $\varepsilon > 0$ era arbitrario segue che (4.57) soddisfa la disuguaglianza triangolare; dunque è una norma.

4.33. Teorema. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, $M \subset X$ UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE CHIUSO; X/M MUNITO DELLA NORMA $\inf\{\|x\| / x \in \xi\}$ E' UNO SPAZIO DI BANACH.

Dim. Sia $\xi_1, \xi_2, \ldots$ una successione di Cauchy in X/M; $\forall n$ sia i_n tale che $\|\xi_h - \xi_k\| < \frac{1}{2^{n+1}}$ se $h,k \geq i_n$. Basta mostrare che ξ_{i_n} è convergente. Sia $\eta_1 = \xi_{i_1}$, $\eta_n = \xi_{i_n} - \xi_{i_{n-1}}$ per $n > 1$; poichè $\sum_{i=1}^{n} \eta_i = \xi_{i_n}$ basta dimostrare che $\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i$ è convergenete in X/M. Sia $x_i \in \eta_i$

tale che

$$\| x_i \| < \| \eta_i \| + \frac{1}{2^i} ;$$

poichè $\| \eta_n \| = \| \xi_{i_n} - \xi_{i_{n-1}} \| < \frac{1}{2^n}$ per $i > 1$, è $\| x_i \| < \frac{1}{2^{i-1}}$ per $i > 1$. Quindi $\sum_{i=1}^{N} x_i$ è una successione di Cauchy in X ed esiste $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$. Detto $\xi \in X/M$ la classe di x, è

$$\| \xi - \xi_{i_n} \| = \| \xi - \sum_{i=1}^{n} \eta_i \| \leq \| x - \sum_{i=1}^{n} x_i \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

quindi X/M è completo. $\square$

4.34. <u>Corollario</u>. SIA Y UNO SPAZIO TOPOLOGICO, $E \subset Y$, ED X LO SPAZIO DI BANACH DELLE FUNZIONI CONTINUE LIMITATE DI Y NEI COMPLESSI. DETTO M IL SOTTOSPAZIO DI X: $\{ f \in X / f(y) = 0 \ \forall y \in E \}$, ED X_E LO SPAZIO DI BANACH DELLE FUNZIONI CONTINUE E LIMITATE DI $(E, \mathcal{T}_E)$ NEI COMPLESSI, SI HA

(i) L'APPLICAZIONE $\psi : X/M \to X_E$, $\psi(f+M) = f|E$ è <u>isometrica</u>; dunque $\{ f|E / f \in X \}$ è <u>chiuso</u> in X_E e pertanto (teorema 2.15) coincide con X_E.

Dim. Chiaramente $\| f|E \| = \sup\{ |f(y)| \,/ y \in E \} \leq$ $\sup\{ |f(y)| \,/ y \in Y \} = \|f\|$ per $f \in X$; se $m \in M$, $m|E=0$ dunque $\| f|E \| = \| (f-m)|E \| \leq \| f-m \|$; quindi $\| \psi(\tilde{f}) \| \leq \| \tilde{f} \|$, $\tilde{f} \in X/M$. Se $f \in X$ sia f^E la funzione di Y in $\mathbb{C}$: $f^E(y) = f(y)$ se $|f(y)| \leq \| f|E \|$; $f^E(y) = f(y) \cdot |f(y)|^{-1} \| f|_E \|$ se $|f(y)| > \| f|_E \|$; è $f^E \in X$, $(f-f^E)(y)=0$ se $y \in E$. Quindi $f+M=f^E+M=\tilde{f}$ e

$$\| \psi(\tilde{f}) \| = \| \psi(\widetilde{f^E}) \| = \| f^E \| \geq \| \tilde{f} \| . \quad \Box$$

4.35. Proposizione. SIA X UNO SPAZIO DI BANACH, $M \subset X$ UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE CHIUSO. ALLORA

$$(X/M)' \sim M^{\perp} \tag{4.59}$$

$$M' \sim X'/M^{\perp} \tag{4.60}$$

dove "$\sim$" significa che gli spazi di Banach sono isometricamente isomorfi.

Dim. Se $f \in M^{\perp}$ sia $\varphi(f): \xi \in X/M \longrightarrow \langle \varphi(f), \xi \rangle = \langle f, x$ dove $x \in \xi$. L'applicazione φ è lineare; $\varphi(f) \in (X/M)'$ perc

$$|\langle \Psi(f), \xi \rangle| \leq \|f\| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in \xi,$$ implica

$$|\langle \Psi(f), \xi \rangle| \leq \|f\| \cdot \inf\{\|x\| \,/\, x \in \xi\} = \|f\| \cdot \|\xi\|.$$

Sia $x \in X$, $\|x\| = 1$, tale che $|\langle f,x \rangle| > \|f\| - \varepsilon$, $f \in M^{\perp}$; sia ξ la classe di x in X/M; allora è $\|\xi\| \leq \|x\| = 1$, e si ha

$$\|\Psi(f)\| \geq |\langle \Psi(f), \xi \rangle| = |\langle f, x \rangle| > \|f\| - \varepsilon$$

dunque $\|\Psi(f)\| = \|f\|$ e Ψ è una isometria. Infine, Ψ è surgettiva: se $\varphi \in (X/M)'$, $\langle f,x \rangle = \langle \varphi, x+M \rangle$ definisce $f \in M^{\perp}$ tale che $\Psi(f) = \varphi$. Ciò prova la (4.59).

Per la (4.60): definiamo $\rho : X'/M^{\perp} \longrightarrow M'$ ponendo

$$\rho(\tilde{f}) = \rho(f+M^{\perp}) = f\big|_M ;$$

se $g \in M^{\perp}$, $\|f|_M\| = \|(f+g)|_M\| \leq \|f+g\|$ quindi $\|f|_M\| \leq \|\tilde{f}\|_{X'/M^{\perp}}$. Per il teorema di Hahn-Banach, dato $f_0 \in M'$, $\exists\, f \in X'$ tale che

$$f\big|_M = f_0 \quad ; \quad \|f\| = \|f_0\| \quad ;$$

ciò prova che ρ è surgettiva e $\| f|M \| = \| f_0 \| = \| f \| \geq$ $\geq \| \tilde{f} \|_{X'/M^\perp}$; la disuguaglianza opposta essendo già provata, segue che ρ è anche isometrica. $\square$

Dal Lemma 4.31 e dal teorema 4.29 segue facilmente il seguete Corollario.

4.10. Spazio di Hilbert; teorema di RIESZ.

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert, $M \subset \mathcal{H}$ un sottospazio vettoriale. Il sottospazio

$$M^\perp = \{ x \in \mathcal{H} \ / \ (x,y)=0 \quad \text{se} \quad y \in M \} \tag{4.61}$$

è <u>chiuso</u> ed è detto <u>complemento ortogonale</u> di M.

(4.37. <u>Teorema</u>. Sia $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT, $M \subset \mathcal{H}$ UN SOTTOSPAZIO VETTORIALE CHIUSO; PER $x \in \mathcal{H}$,

$$(4.62) \qquad \begin{aligned} & x = x_M + x_{M^\perp} \\ & x_M \in M;\ x_{M^\perp} \in M^\perp. \end{aligned}$$

<u>Osservazione</u>. Poichè da (4.62) segue

$$(4.63) \qquad \|x\|^2 = \|x_M\|^2 + \|x_{M^\perp}\|^2$$

la decomposizione (4.62) è <u>unica</u>; $x = x'_M + x'_{M^\perp} \Rightarrow x_M = x'_M, x_{M^\perp} = x'_{M^\perp}$.

<u>Dim</u>. Sia $x \notin M$; poichè M è chiuso, $d = d(x,M) > 0$.

Mostriamo che basta: $\exists\ x_M \in M$ tale che $d(x,M) = d(x,x_M) = \|x - x_M\|$.

Infatti, in tal caso, se $x' \in M$, è

$$d^2 \leq \|x - (x_M + x')\|^2 = \|x'\|^2 + \|x - x_M\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x', x - x_M) =$$

$$= d^2 + \|x'\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x', x - x_M)$$

cioè, $\forall\ x' \in M$, $\| x'\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(x', x-x_M) \geqslant 0$; ciò è possibile solo se $(x', x-x_M) = 0$ poichè M è un sottospazio vettoriale. Quindi $x - x_M \in M^{\perp}$ e le (4.62) sono dimostrate, se $\exists\ x_M$.

Siano $y_1, y_2 \in M$; dall'identità del parallelogramma segue

$$2(\| x-y_1 \|^2 + \| x-y_2 \|^2) = \| 2x-(y_1+y_2)\|^2 + \| y_1-y_2 \|^2 \geqslant$$

$$\geqslant \quad 4\, d^2 + \| y_1-y_2 \|^2$$

cioè

(4.64) $$\| y_1-y_2 \|^2 \leq 2(\| x-y_1\|^2 - d^2 + \| x-y_2 \|^2 - d^2) .$$

Sia $x_n \in M$ una successione tale che

(4.65) $$\| x-x_n \| \quad \rightarrow \quad d \quad ;$$

la (4.64) per $y_1 = x_n$, $y_2 = x_m$ mostra che $\{ x_n \}$ è <u>di Cauchy</u>; poichè $\mathcal{H}$ è completo ed M è chiuso esiste

$$x_M = \lim x_n \in M \quad ;$$

dalla (4.65) segue $\| x - x_M \| = d$. $\square$

<u>Osservazione</u>. Segue immediatamente: se $M \subset \mathcal{H}$ è un sottospazio vettoria

$$\overline{M} = M^{\perp\perp} \tag{4.66}$$;

infatti ogni $x \in \mathcal{H}$ si decompone nei due modi $x = x_{\overline{M}} + x'_{\overline{M}^\perp} = x_{M^\perp} + x_{M^{\perp\perp}}$. Poichè $\overline{M}^\perp = M^\perp$ ed $\overline{M} \subset M^{\perp\perp}$ segue $x'_{\overline{M}^\perp} = x_{M^\perp}$ e $x_{\overline{M}} = x_{M^{\perp\perp}}$; dunque $M^{\perp\perp} = \overline{M}$.

Confrontare con il teorema 4.14.

4.28. <u>Teorema</u>. (RIESZ) SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT, f UN FUNZIONALE LINEARE CONTINUO SU $\mathcal{H}$; ESISTE $x_f \in \mathcal{H}$ TALE CHE

$$f(x) = (x_f, x) \quad , \quad x \in \mathcal{H} \tag{4.67}$$

$$\| x_f \| = \| f \| . \tag{4.68}$$

<u>Dim.</u> Sia $f \neq 0$; il sottospazio chiuso $\mathcal{N}(f)$ è diverso da $\mathcal{H}$ dunque esiste $x_0 \in \mathcal{N}(f)^\perp$, $x_0 \neq 0$. Il funzionale lineare $x \to (x_0, x)$ si annulla su $\mathcal{N}(f)$ ed è $\neq 0$. Quindi (teorema (4.15)

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_0, x) \cdot f(x_0), \quad x \in \mathcal{H} \\ &= (x_f, x) . \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza di Schwartz $\| f \| \leq \| x_f \|$; poichè $f(x_f) = \| x_f \|^2$ segue $\| f \| = \| x_f \|$.

Sia $\overline{\mathcal{H}}$ il gruppo additivo $\mathcal{H}$ munito della operazione

$$\lambda \in \mathbb{C},\ x \in \overline{\mathcal{H}} \longrightarrow \lambda \cdot x \text{ in } \overline{\mathcal{H}} = \bar{\lambda} x \in \mathcal{H};$$

$\overline{\mathcal{H}}$ è uno spazio di Hilbert (ovvio); per il teor.(4.38) lo spazio duale $\mathcal{H}'$ di $\mathcal{H}$ è isometricamente isomorfo ad $\overline{\mathcal{H}}$.

In particolare: uno spazio di Hilbert è uno spazio di Banach riflessivo.

Un insieme $A \subset \mathcal{H}$ è <u>ortonormale</u> se $x, x' \in A \Rightarrow (x,x')=0$ se $x \neq x'$ e $(x,x)=1$. Gli insiemi ortonormali in $\mathcal{H}$ parzialmente ordinati per inclusione verificano l'ipotesi del Lemma di Zorn: se $\mathcal{B}$ è una famiglia di insiemi ortonormali tale che $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \subset B_2$ oppure $B_2 \subset B_1$, allora $\cup \mathcal{B}$ è una famiglia ortonormale in $\mathcal{H}$. Quindi esistono insiemi ortonormali <u>massimali</u> in $\mathcal{H}$.

4.39. <u>Teorema</u>. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT; $\{ e_\alpha / \alpha \in A \} \subset \mathcal{H}$ UN INSIEME ORTONORMALE. LE SEGUENTI CONDIZIONI SONO EQUIVALENTI:

(i) $\{ e_\alpha / \alpha \in A \}$ E' UN INSIEME ORTONORMALE MASSIMALE;

(ii) $x \in \mathcal{H},\ (x, e_\alpha)=0\ \forall \alpha \in A \Rightarrow x = 0$;

(iii) IL SOTTOSPAZIO CHIUSO $\mathcal{M}$ GENERATO DA $\{e_\alpha / \alpha \in A\}$ E' UGUALE AD $\mathcal{H}$;

(iv) $\forall x \in \mathcal{H}, \|x\|^2 = \sum_{\alpha\in A} |(x, e_\alpha)|^2$ (identità di PARSEVAL);

(v) $\forall x \in \mathcal{H}, \quad x = \sum_{\alpha \in A} (e_\alpha, x) e_\alpha$.

Un tale insieme $\{e_\alpha / \alpha \in A\}$ si dirà una <u>base ortonormale</u> di $\mathcal{H}$.

<u>Dim.</u> (i) $\Leftrightarrow$ (ii) è banale; (ii) $\Leftrightarrow$ (iii) segue dalla (4.66); sia $A' \subset A$ finito ed M' il sottospazio generato da $\{e_\alpha / \alpha \in A'\}$; come sappiamo M' è chiuso; dall'unicità della decomposizione (4.62) segue che, se $x \in \mathcal{H}$,

$$x_{M'} = \sum_{\alpha \in A'} (e_\alpha, x) e_\alpha .$$

Detto $\mathcal{M}_0$ il sottospazio vettoriale (<u>non</u> chiuso) generato da $\{e_\alpha / \alpha \in A\}$, è dunque

$$\left.\begin{aligned} x &= \sum_{\alpha \in A} (e_\alpha, x) e_\alpha , \\ \|x\|^2 &= \sum_{\alpha \in A} |(e_\alpha, x)|^2 , \end{aligned}\right\} \quad x \in \mathcal{M}_0 ;$$

entrambe le somme essendo estese ad un numero <u>finito</u> di termini non nulli.

Sia $\mathcal{N}_0$ il sottospazio denso di $\ell^2(A)$ costituito dalle funzioni f tali che $\{\alpha\in A / f(\alpha)\neq 0\}$ è <u>finito</u>; la corrispondenza $f\in\mathcal{N}_0 \longrightarrow \sum_{\alpha\in A} f(\alpha)e_\alpha \in \mathcal{M}_0$ è dunque lineare isometrica e surgettiva. Poichè $\ell^2(A)$ ed $\mathcal{H}$ sono <u>completi</u> tale corrispondenza si estende unicamente in una corrispondenza

$$f \in \ell^2(A) \longrightarrow \sum_{\alpha\in A} f(\alpha)e_\alpha \in \mathcal{M}$$

lineare isometrica di $\ell^2(A)$ <u>su</u> $\mathcal{M}$. Dunque $\forall x\in\mathcal{M}, \exists f\in\ell^2(A)$, $x=\sum_{\alpha\in A} f(\alpha)e_\alpha$; segue $f(\alpha)=(e_\alpha, x)$, $\alpha\in A$, e segue che (iii) $\Longleftrightarrow$ (v). Inoltre segue

$$\|x_{m^\perp}\|^2 = \|x\|^2 - \|x_m\|^2 =$$

$$= \|x\|^2 - \sum_{\alpha\in A} |(x, e_\alpha)|^2$$

da cui la <u>disuguaglianza di Bessel</u> $\sum_{\alpha\in A} |(x, e_\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$, $x\in\mathcal{H}$, e l'equivalenza (iii) $\Longleftrightarrow$ (iv). $\square$

4.41. <u>Proposizione</u>. SIA $\mathcal{H}$ UNO SPAZIO DI HILBERT; $\{e_\alpha / \alpha\in A\}$ ED $\{f_\beta / \beta\in B\}$ DUE BASI ORTONORMALI DI $\mathcal{H}$; ALLORA

$$\text{card}(A) = \text{card}(B) \quad .$$

Dim. Se lo spazio vettoriale $\mathcal{H}$ ha dimensione finita è evidentemente card(A) = card(B)=dim $\mathcal{H}$. Viceversa se dim $\mathcal{H}$ non è finita, non lo sono neppure card A e card B. Per ogni $\alpha\in$ A definiamo

$$B_\alpha = \{\beta\in B \,/\, (e_\alpha, f_\beta) \neq 0\} \;;$$

B_α è numerabile e $\cup\{B_\alpha \,/\, \alpha\in A\}$ = B per il teorema 4.39. Dunque card(B) $<$ card(A) . card(N) = card(A) poichè A non è finito; analogamente, card A $<$ card B dunque segue l'asserto. $\square$

Definizione. La dimensione Hilbertiana di uno spazio di Hilbert è la cardinalità di una sua qualunque base ortonormale.

4.42. Corollario. DUE SPAZI DI HILBERT SONO ISOMORFI SE E SOLO SE HANNO LA STESSA DIMENSIONE HILBERTIANA; UNO SPAZIO DI HILBERT E' SEPARABILE SE E SOLO SE HA DIMENSIONE FINITA O NUMERABILE.

Dim. Se dim $\mathcal{H}_1$ = dim $\mathcal{H}_2$ esiste una base ortonormale $\{e_\alpha^{(i)} \,/\, \alpha\in A_i\}$ in $\mathcal{H}_i$, i=1,2,... con card A_1=cardA_2; per definizione A_1 ed A_2 si possono porre in corrispondenza biunivoca e possiamo dunque supporre $A_1=A_2=A$. Allora $\mathcal{H}_1$ ed $\mathcal{H}_2$ sono isomorfi ad $\ell^2(A)$ dunque isomorfi tra loro. Se $\mathcal{H}_1$ ed $\mathcal{H}_2$ sono isomorfi e V è una applicazione lineare ed isometrica di $\mathcal{H}_1$ su $\mathcal{H}_2$. $\{Ve_\alpha / \alpha \in A\}$ è una base ortonormale in $\mathcal{H}_2$ se $\{e_\alpha / \alpha \in A\}$ è una base ortonormale in $\mathcal{H}_1$ dunque $\dim \mathcal{H}_1 = \dim \mathcal{H}_2$.

Lo spazio di Hilbert $\ell^2(\mathbb{N})$ è separabile: le successioni di razionali nulli a parte un numero finito di indici formano un sottoinsieme numerabile denso in $\ell^2(\mathbb{N})$. Dunque se $\mathcal{H}$ è di dimensione al più infinita numerabile, $\mathcal{H}$ è separabile.

Viceversa sia $x_1, x_2, \ldots$ una successione densa in $\mathcal{H}$. Possiamo supporre che $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siano linearmente indipendenti per ogni n. Allora, detto $\mathcal{M}_n$ il sottospazio generato da $x_1, \ldots, x$ è $x_{n+1} \notin \mathcal{M}_n$ e la componente ortogonale ad $\mathcal{M}_n$ di x_{n+1}, y_{n+1}, è diversa da zero; poniamo

$$e_n = \| y_n \|^{-1} y_n \quad ;$$

$e_1, e_2, \ldots$ è una base ortonormale in $\mathcal{H}$ (Teorema 4.39 (iii)). [

4.11. Esempi e complementi

Sia K uno spazio topologico compatto di Hausdorff; sia F un funzionale lineare sullo spazio di Banach $\mathcal{C}(K)$. Diremo che F è positivo se

$$F(f) \geqslant 0 \quad \forall f \in \mathcal{C}(K), \quad f \geqslant 0 .$$

Se F è positivo, segue $F \in \mathcal{C}(K)'$: $f \in \mathcal{C}(K)$,

$$\|f\| \cdot I - \operatorname{Re} f \geqslant 0$$

$$\|f\| \cdot I - \operatorname{Im} f \geqslant 0$$

da cui segue che esiste $K > 0$ tale che

$$\left| F(f) \right| \leqslant K \cdot \|f\| \quad , \quad f \in \mathcal{C}(K) .$$

Viceversa: se $F \in \mathcal{C}(K)$ è $F = F_1 + i F_2$ dove F_1 ed F_2 sono reali:

$$\overline{\langle F_i, f \rangle} = \langle F_i, f^* \rangle \; ;$$

se $F \in \mathcal{C}(K)'$ è reale, si può dimostrare che $F = F_1 - F_2$ dove F_1 ed

$F_2 \in \mathcal{C}(K)'$ sono <u>positivi</u>.

Sia $F \in \mathcal{C}(K)'$ positivo; esiste (Teorema di Riesz-Markov, vedi NAIMARK, REED-SIMON) una misura μ_F con le proprietà seguenti (i) μ_F è definito sui <u>boreliani</u> di K (cioè sulla famiglia $\mathcal{B}(K) \subset P(K)$ generata dai chiusi mediante unioni <u>numerabili</u> e passaggio al complementare: cioè $\mathcal{B}(K)$ è il più piccolo σ-<u>anello</u> contenente i chiusi); (ii) μ_F è <u>regolare</u>: se $A \subset K$ è μ_F-misurabile e $\varepsilon > 0$, esiste A_1 compatto ed A_2 aperto tali che $A_1 \subset A \subset A_2$ e

$$\mu_F(A \setminus A_1) < \varepsilon \ , \quad \mu_F(A_2 \setminus A) < \varepsilon .$$

(iii) μ_F è σ-<u>additiva:</u> $\mu_F(\bigcup_i A_i) = \sum_i \mu_F(A_i)$ se $A_1, A_2,$ è una <u>successione</u> di insiemi misurabili disgiunti; (iv) il legame tra F e μ_F è espresso da

$$\langle F, f \rangle = \int f(x)\, d\mu_F(x) \ , \quad f \in \mathcal{C}(K) \tag{4.69}$$

$$\mu_F(K) = F(I) = \| F \| . \tag{4.70}$$

viceversa ogni misura di Borel regolare su K (cioè con le propri tà (i)-(iii) che sia finita e positiva ($0 \leq \mu(A) \leq \|\mu\|$ per A boreliano $\subset$ K) determina attraverso la (4.69) $F_\mu \in \mathcal{C}(K)'$ per cui vale la (4.70).

Sia $\mathcal{M}(K)$ lo spazio vettoriale delle misure boreliane regolari su K e finite; $\mathcal{M}(K)$ è uno spazio di Banach isomorfo a $\mathcal{C}(K)'$. Se $t_0 \in K$ la misura di Dirac $\delta_{t_0} \in \mathcal{M}(K)$ è definita da: $f \in \mathcal{C}(K) \longrightarrow \langle \delta_{t_0}, f \rangle = f(t_0)$. Sia $\mathcal{M}_o \subset \mathcal{M}(K)$ il sottospazio vettoriale generato dalle misure di Dirac: $\mu \in \mathcal{M}_o$ se esistono $t_1, \ldots, t_{n(\mu)} \in K$; $\lambda_1, \ldots, \lambda_{m(\mu)} \in \mathbb{C}$, tali che

$$\mu = \sum_{i=1}^{m(\mu)} \lambda_i \delta_{t_i}$$

Chiaramente $\mathcal{M}_o^\perp = \{0\}$ in $\mathcal{C}(K)$; dunque: ogni misura regolare su K è limite $*$- debole di conbinazioni lineari finite di misure di Dirac.

Sia Ω uno spazio topologico localmente compatto di Hausdorff. Supponiamo che Ω sia numerabile all'infinito nel senso che Ω è l'unione di una famiglia numerabile di insiemi compatti (equivalentemente: il punto all'infinito possiede una base numerabile di intorni, cfr. par.2.4).

Sia X lo spazio vettoriale delle funzioni continue a supporto

compatto di Ω nel complessi. Per ogni compatto $K \subset \Omega$, lo spa
di Banach $\mathcal{C}(K)$ è un sottospazio di X.

Definiamo una topologia su X: $U \subset X$ è aperto se $U \cap \mathcal{C}(K)$ è aperto per ogni compatto $K \subset \Omega$.

Sia φ una funzione continua positiva su Ω, che tende a zero all'infinito. Per $f \in X$, $t \in \Omega \longrightarrow \varphi(t)^{-1} f(t) \in X$; poniam

$$P_\varphi(f) = \sup\left\{ |\varphi(t)^{-1} f(t)| \;/\; t \in \Omega \right\}.$$

Al variare di φ otteniamo una base di seminorme per la topologia di X; dunque X è uno S.V.L.C.

Esercizio 1. Verificarlo.

Esercizio 2. $f_n \longrightarrow 0$ in X se e solo se $\exists\, K \subset \Omega$ compatto tale che $f_n \in \mathcal{C}(K)$, $n=1,2,\dots$ e $\|f_n\| \longrightarrow 0$ in $\mathcal{C}(K)$.

Esercizio 3. $F \in X'$ se e solo se, $\forall K \subset \Omega$ compatto, $F|\mathcal{C}(K)$ è limitato.

In particolare: se F è un funzionale lineare su X, F positivo $\Rightarrow F \in X'$; se $F \in X'$ è reale, è $F = F_1 - F_2$ con $F_i \in X'$ positivi; ogni funzionale lineare positivo F su X è determinato da una misura positiva μ_F su Ω che è σ-additiva, definita sui boreliani di Ω, e regolare nel senso che se $A \subset \Omega$ è misurabile con $\mu_F(A) < \infty$, $\varepsilon > 0$, esiste $K \subset \Omega$ compatto ed $U \subset \Omega$ aperto, $K \subset A \subset U$, con

$$\mu_F(A \setminus K) < \varepsilon \quad , \qquad \mu_F(U \setminus A) < \varepsilon .$$

La relazione tra F e μ_F è

$$\langle F, f \rangle = \int_\Omega f(t) d \mu_F(t) \quad ; \tag{4.71}$$

tale relazione viceversa determina un elemento $F_\mu \in X'$ data una misura μ su Ω del tipo discusso, e tale che $\mu(K) < \infty$ per ogni compatto $K \subset \Omega$.

Sia $\mathcal{S}$ lo spazio di Fréchet definito nel paragrafo 4.2, esercizio 2.

Esercizio 4. Mostrare che ogni insiemi limitato in $\mathcal{S}$ è relativamente compatto.

Esercizio 5. Mostrare che una successione $F_n \in \mathcal{S}'$ converge $*$-debolmente se e solo se converge fortemente.

<u>Esercizio 6</u>. Sia $F \in \mathcal{S}'$; mostrare che esiste un intero n ed u funzione continua g limitata da un polinomio, tali che

$$\langle F,f \rangle = \int g(x)\, f^{(n)}(x)\,dx \quad , \quad f \in \mathcal{S}.$$

(esercizio 2. del paragrafo 4.2 e teorema di Riesz).

Sia G un <u>gruppo</u> munito di una topologia di Hausdorff; dir mo che G è un <u>gruppo topologico</u> se l'applicazione

$$h,g \in G \times G \longrightarrow h^{-1}g \in G \tag{4.72}$$

è continua.

Sia G localmente compatto ed X lo spazio vettoriale $\bigcup \{ \mathcal{C}(K) \; / \; K \subset G \text{ compatto} \}$; se F è un funzionale positivo su X, tale è per ogni $g \in G$, $L_g F$, dove

$$\langle L_g F, f \rangle = \langle F, {}_g f \rangle ,$$

con $\quad {}_g f : h \in G \longrightarrow f(gh); \; f \in X$.

Il teorema di Haar (Loomis, Capitolo VI) afferma che, a meno di un multiplo reale positivo, esiste un unico funzionale positivo F_ℓ su X invariante a sinistra, cioè tale che

$$L_g F_\ell = F_\ell \quad ; \quad g \in G .$$

Analogamente esiste un funzionale positivo F_r su X invariante a destra, unico a meno di multiplo positivo.

Se G è commutativo: $g_1 g_2 = g_2 g_1 \quad \forall g_1, g_2 \in G$, le traslazioni a destra ed a sinistra coincidono ed il teorema di Haar dice che esiste un funzionale positivo invariante. In tal caso anche

$$(4.73) \qquad L_g L_h F = L_h L_g F \quad ; \quad h, g \in G$$

per ogni funzionale lineare positivo F su X.

Sia G commutativo e compatto. In tal caso l'esistenza dell'integrale di Haar segue direttamente dal teorema di Markov-Kakutani. Infatti: $F \in \mathcal{C}(G)' \longrightarrow Lg\, F \in \mathcal{C}(G)'$ è continua nella topologia $\mathcal{X}$-debole per ogni $g \in G$, la famiglia di trasformazioni lineari $\{ Lg \,/\, g \in G \}$ è commutativa (4.73) e lascia stabile il convesso

$$K = \{F \in \mathcal{C}(G)' \ / \ \|F\| \leq 1\} \cap \{F \in \mathcal{C}(G') \ / \langle F, I \rangle = 1\} ;$$

tale convesso è compatto per il teorema di Alaoglu, dunque esiste $F_o \in K$ invariante.

Poichè (vedi parte II di queste note, oppure Reed-Simon IV 16) ogni $F \in K$ è positivo, F_o è positivo.

ERRATA CORRIGE

Pag. 4.2, riga -4, aggiungere:

poichè l'inviluppo convesso in X di un aperto è aperto.

$$\left.\begin{array}{l}\text{Pag; 4.38, ultima riga:}\\ \text{Pag 4.39, righe 2 e 5:}\end{array}\right\}\ \text{sostituire} \geq \text{con} \leq .$$

B I B L I O G R A F I A

1. F. TREVES: "Topological Vector Spaces, Distributions and Kepnels" Acad. Press, New York 1967.

2. M.A.NAIMARK: "Normed Rings" Noordhoff, Groningen 1972.

3. K. YOSIDA: "Functional Analysis" Springer, New York 1971.

4. N.DUNFORD, J.T.SCHWARTZ: "Linear Operators" I, Interscience, New York 1968.

5. M.REED,B.SIMON: "Functional Analysis" Acad. Press, New York 1972.

6. G.L.H.LOOMIS: "An Introduction to Abstract Harmonic Analysis" Van Nostrand, Princeton, 1953.