Processi Stocastici 2013-2014, Prof. Mauro Piccioni
Esame scritto del 13/2/2014

1. Si consideri un grafo arbitrario (non orientato) $G = (V, E)$ e si aggiunga a questo un vertice, che chiamiamo 0, che si connette a tutti i vertici di V. Sul nuovo grafo $\tilde{G} = (\tilde{V}, \tilde{E})$ con $\tilde{V} = V \cup \{0\}$ e $\tilde{E} = E \cup \{\{i, 0\}, i \in V\}$ si consideri una passeggiata aleatoria (X_n). Avvertenza: si indichino con $|V|$ e $|E|$ il numero di vertici e di spigoli di G.

   (a) Determinare il numero medio di visite in 0 tra una visita e la successiva ad un fissato stato $i \in V$, di valenza v_i in G. RISPOSTA: Il grafo $\tilde{G}$ e in ogni caso connesso, quindi (X_n) e irriducibile. Quindi e ricorrente e reversibile, con distribuzione invariante π proporzionale alla valenza in $\tilde{G}$, quindi $\pi_i = C(v_i + 1)$, per $i \in G$ e $\pi_0 = C|G|$. La quantita richiesta e $\frac{\pi_0}{\pi_i} = \frac{|G|}{v_i+1}$.

   (b) Determinare il limite, per $n \to \infty$, della probabilita che X_n sia uguale a $i \in V$. RISPOSTA: La catena (X_n) e in ogni caso aperiodica, visto che $p_{00}^{(n)} > 0$ per $n \geq 2$. Quindi il limite richiesto e $\pi_i = C(v_i + 1)$. Dalla condizione di normalizzazione si evince che $C = 2|E| + 2|G|$.

2. Una sorgente emette ad ogni istante di tempo un simbolo Y_n estratto a caso da un alfabeto A di 3 lettere, indipendentemente dai simboli estratti in precedenza. Si ponga $X_n = (Y_n, Y_{n-1}, Y_{n-2})$.

   (a) Determinare una funzione di codifica f, che manda A^3 in un insieme I, in modo che $(f(X_n))$ sia una catena di Markov su I con uno stato $0 \in I$ tale che $f(a, b, c) = 0$ se e solo se $a = b = c$. Avvertenza: ovviamente si puo scegliere f uguale all'identita nel qual caso $|I| = 27$; si cerchi di prendere $|I|$ piu piccola possibile. RISPOSTA: Con $f(a, b, c) = 2$ se a e b non sono uguali, $f(a, b, c) = 1$ se a e b sono uguali, ma c diverso, si ottiene una catena di Markov con $p_{2,1} = 1/3$, $p_{2,2} = 2/3$, $p_{1,0} = 1/3$ e $p_{1,2} = 2/3$, con tutti gli altri elementi nulli.

   (b) Supponendo che Y_{-2}, Y_{-1} e Y_0 siano lettere distinte dell'alfabeto, calcolare il valore atteso della variabile aleatoria $K = \inf\{n : Y_n = Y_{n-1} = Y_{n-2}\}$. RISPOSTA: La quantita richiesta e l'hitting time atteso di 0 partendo da 2, cioe k_2^0. Ora $k_2^0 = 1 + \frac{2}{3}k_2^0 + \frac{1}{3}k_1^0$, mentre $k_1^0 = 1 + \frac{2}{3}k_2^0$. Risolvendo si ha $k_1^0 = 9$ e $k_2^0 = 12$.

3. Si consideri un gruppo di $2N$ persone, ciascuna dotata di un solo telefono, con il quale comunicano solo tra loro, nel modo seguente. La durata di ogni singola chiamata e esponenziale di parametro ρ, indipendente da tutte le chiamate precedenti. Il tempo che intercorre tra una chiamata e l'altra tra due persone distinte fissate (nell'ipotesi che durante questo tempo il loro telefono resti libero) e esponenziale con parametro 1, anch'esso indipendente dalla durata delle chiamate e dai tempi di attesa precedenti. Sia X_t il numero di chiamate in corso al tempo t.

   (a) Si motivi il fatto che (X_t) e una catena di Markov in tempo continuo e se ne determini la Q-matrice. RISPOSTA: Quando $X_t = k$, indipendentemente da quanto successo prima per la proprieta di mancanza di memoria della distribuzione esponenziale, il processo ha il salto successivo al tempo $t+T$, dove T e il minimo tra gli $\binom{2N-2k}{2}$ tempi di attesa di una nuova chiamata per ciascuna coppia di utenti liberi e i k tempi di attesa della fine di una delle k chiamate in corso, tutti mutuamente indipendenti. Per cui si ha $-q_{k,k} = \binom{2N-2k}{2} + k\rho$, $q_{k,k+1} = \binom{N-k}{2}$, per $k < N$ e $q_{k,k-1} = k\rho$, per $k > 0$.

(b) Si supponga ora che al tempo 0 siano in corso k chiamate, e sia T_k il tempo di primo ritorno in k. Determinare il rapporto tra il tempo atteso di soggiorno nello stato N (tutti i telefoni occupati) fino al tempo T_k e il tempo atteso di soggiorno nello stato 0 (tutti i telefoni liberi) fino al tempo T_k. RISPOSTA: La quantita richiesta e $\frac{\mu_N^k}{\mu_0^k}$. Dato che il processo e irriducibile e ricorrente, queste quantita si calcolano nota la distribuzione invariante λ, che si ottiene dalla condizione di bilancio dettagliato $\lambda_k = \frac{\binom{2N-2k+2}{2}}{\rho k}\lambda_{k-1}$ per $k = 1, \dots, N$. Si ha quindi $\lambda_k = \frac{(2N)!}{(2\rho)^k (2N-2k)! k!}\lambda_0$, per $k = 0, \dots, N$. Dato che $\mu_j^k = m_k \lambda_j$, per $j = 0, \dots, N$, essendo $m_k = E_K(T_k)$ il tempo atteso di ritorno in k. Si ha infine

$$\frac{\mu_N^k}{\mu_0^k} = \frac{\lambda_N}{\lambda_0} = \frac{(2N)!}{N!(2\rho)^N}.$$

4. Si consideri una catena di Markov (X_t) in tempo continuo sugli interi non negativi con una Q-matrice i cui soli elementi positivi fuori dalla diagonale sono $q_{n-1,n} = \lambda$ e $q_{n,0} = \mu$, per $n = 1, 2, \dots$.

(a) Partendo da uno stato qualunque, si determini il limite per $t \to \infty$ della probabilita che X_t sia uguale a i, essendo i un fissato intero non negativo. RISPOSTA: La catena e irriducibile, e la catena di salto ha tempi di ritorno in 0 che hanno distribuzione geometrica con probabilita di successo $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$, da cui la catena di salto e ricorrente, e tale resta la catena di partenza in tempo continuo. Sappiamo quindi che, a meno di una costante di proporzionalita, c'e un'unica soluzione ν non negativa del sistema di equazioni $\nu Q = 0$, che e in questo caso

$$\lambda\nu_0 = \mu \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i, \lambda\nu_k = (\lambda+\mu)\nu_{k+1}, k = 0, 1, \dots.$$

Tralasciando per ora la prima equazione, otteniamo $\nu_k = (\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^k \nu_0$ per ogni k intero che, sostituita nella prima equazione, la soddisfa qualunque sia ν_0. Si osserva infine che si puo scegliere ν_0 in modo che ν sia una distribuzione invariante $\nu_k = (\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^k (\frac{\mu}{\lambda+\mu})$ per ogni intero k. Si conclude che questa distribuzione e anche di equilibrio, cosa che vale sempre per le catene irriducibili a tempo continuo.

(b) Si esprima X_t in funzione di due processi di Poisson indipendenti, uno di intensita λ e uno di intensita μ. RISPOSTA: Sia A il processo di Poisson di intensita λ e B quello di intensita μ. Nei tempi S_k dove avviene un evento per quest'ultimo processo (cioe esso salta di una unita) si definisce $X_{S_k} = 0$, per $k = 1, 2, \dots$. Tra un evento e l'altro di questo processo, con $S_k \leq t < S_{k+1}$ si definisce $X_t = A_t - A_{S_k}$, per $k = 1, 2, \dots$. Per $0 \leq t < S_1$ si definisce invece $X_t = X_0 + A_t$, con X_0 avente la desiderata legge iniziale, indipendente dai processi A e B.