Processi Stocastici, 23/1/2014

1. Uno studente chiede ad un professore di fare da relatore in una tesi. Lo studente dovra quindi presentarsi ad una verifica un mese dopo con un certo compito da fare, verificato il quale il professore decide se accettarlo oppure rinviarlo al mese successivo, con lo stesso compito. Una volta accettato, lo studente deve affrontare dopo un mese una verifica analoga. Se supera la verifica intermedia, un mese dopo deve affrontare la verifica finale. Se questa e negativa, il professore gli fa ripetere la verifica intermedia un mese dopo. Il 10 per cento degli studenti, dopo una verifica negativa, non si presenta alla successiva, rinunciando cosi alla tesi.

   (a) Se ad ogni verifica il professore lancia una una moneta truccata, con una fissata probabilita p di testa, e chiude positivamente ciascuna verifica se la moneta da testa, con quale probabilita uno studente che inizia la procedura arrivera ad una verifica finale positiva? RISPOSTA: Sia 1 lo stato iniziale, 2 lo stato di "accettazione in tesi", 3 lo stato "superata verifica intermedia" e siano h_1, h_2 e h_3 le probabilita di arrivare ad una verifica finale positiva da questi stati. Allora $h_3 = p + \frac{9}{10}(1-p)h_2$, $h_2 = ph_3 + \frac{9}{10}(1-p)h_2$, infine $h_1 = ph_2 + \frac{9}{10}(1-p)h_1$. Risolvendo si ottiene

   $$h_2 = \frac{10p^2}{10 - 9(1-p^2)}, h_1 = \frac{10p}{10 - 9(1-p)} h_2.$$

   (b) Supponiamo che lo studente non si perda mai d'animo e quindi decida dall'inizio di ripresentarsi comunque a tutte le eventuali verifiche, quanto tempo in media occorrera per arrivare ad una verifica finale positiva? RISPOSTA: Si ha $k_2 = 1 + (1-p)k_1$, $k_1 = 1 + pk_2 + (1-p)k_1$ e $k_0 = 1 + pk_1 + (1-p)k_0$ da cui $k_1 = \frac{1+p}{p^2}$ e $k_0 = \frac{1}{p} + k_1$.

2. Si consideri un processo di Markov che si muove sugli spigoli del cubo unitario dello spazio euclideo nel modo seguente. Quando il processo si trova sul quadrato inferiore ($x_3 = 0$) con probabilita r si sposta sul vicino in senso orario di questo quadrato, oppure sale di quota; quando si trova sul quadrato superiore ($x_3 = 1$) con probabilita $1-r$ si sposta sul vicino in senso antiorario di questo quadrato, oppure scende di quota.

   (a) In un intervallo temporale di lunghezza n, al tendere di n a infinito, determinare la proporzione di tempo che il processo si trova sul quadrato superiore. RISPOSTA: Indipendentemente dalle prime due coordinate, la terza (la quota) descrive una catena di Markov con probabilita di transizione da 0 a 1 pari a $1-r$, e con probabilita di transizione da 1 a 0 pari a r. Quindi, per il teorema ergodico, la proporzione asintotica di tempo in cui il processo si trova a quota 0 e r, mentre a quota 1 e $1-r$.

   (b) Determinare la matrice di transizione del processo reverso nel tempo. RISPOSTA: Dalla risposta alla domanda precedente, l'unica distribuzione invariante da a tutti gli stati a quota 0 la probabilita $r/4$ e a tutti quelli a quota 1 la probabilita $(1-r)/4$. Per il processo reverso nel tempo da uno stato a quota 0 si passa con probabilita r sul vicino di sinistra e con probabilita $1-r$ si sale, mentre da uno stato a quota 1 si passa con probabilita $1-r$ sul vicion di destra e con probabilita r si scende.

3. La salute di N persone evolve in modo indipendente secondo lo schema seguente. Ciascuno rimane sano per un tempo esponenziale di media σ, prima di ammalarsi, e malato per un tempo esponenziale di media μ, prima di guarire. Tutti questi tempi sono mutuamente indipendenti. Sia N_t il numero delle persone sane al tempo t.

   (a) Qualunque sia lo stato di salute di ciascuna persona al tempo 0, determinare, al tendere del tempo t all'infinito, il limite della probabilita che $N_t = k$, per $k = 0, 1, \ldots, N$. RISPOSTA: La salute di ciascun individuo rappresenta una catena di Markov indipendente con rate di salto da sano a malato $1/\sigma$ e da malato a sano $1/\mu$. Quindi la probabilita che un singolo individuo sia sano al tempo t, quando t tende all'infinito e $\sigma/(\mu+\sigma)$. Per l'indipendenza delle persone la probabilita richiesta e data dalla legge binomiale con N prove e di probabilita di successo $\sigma/(\mu+\sigma)$.

   (b) Motivare il fatto che N_t e una catena di Markov irriducibile, e determinare l'unica distribuzione invariante. RISPOSTA: Quando ci sono k persone sane, indipendentemente da quanto successo in precedenza, ciascuna di esse ha un rate $1/\sigma$ di ammalarsi, mentre ciascuna delle $(N-k)$ persone malate ha un rate $1/\mu$ di guarire. Il processo N_t e quindi un processo di nascita e morte con rate di nascita $\lambda_k = k/\sigma$ e rate di morte $\mu_k = (N-k)/\mu$. Imponendo il bilancio dettagliato sia ha che la distribuzione invariante e proprio la legge binomiale indicata sopra.

4. Un processo di Markov in tempo continuo X_t ha M stati e ha una Q-matrice i cui elementi positivi fuori dalla diagonale sono $q_{i,i+1} = \lambda_i$, $i = 1, \ldots, M-1$ e $q_{M,1} = \lambda_M$.

   (a) Determinare la distribuzione di equilibrio di X_t. RISPOSTA: Dato che la catena e irriducibile a tempo continuo la distribuzione di equilibrio esiste sempre ed e uguale all'unica distribuzione stazionaria. E facile vedere che questa e identificata dal fatto che $\pi\lambda_i$ non dipende da i e quindi $\pi_i = \frac{1/\lambda_i}{\sum_k 1/\lambda_k}$.

   (b) Sia ora $M = 4$ e si consideri ora un processo che, partendo dall'origine, viaggia a velocita unitaria in direzione N, E, S, W nei periodi in cui il processo X_t si trova negli stati $1, 2, 3$ e 4. Si determinino le coordinate del punto del piano cartesiano cui tende X_t/t. RISPOSTA: Per il teorema ergodico questo punto ha ascissa $\frac{1/\lambda_2 - 1/\lambda_4}{\sum_k 1/\lambda_k}$ e ordinata $\frac{1/\lambda_1 - 1/\lambda_3}{\sum_k 1/\lambda_k}$.