Processi Stocastici 2013-2014, secondo esonero
Esame scritto

1. Si consideri una catena di Markov in tempo continuo su 3 stati, con Q-matrice di cui vengono indicati soltanto gli elementi extra-diagonali positivi,

$$q_{1,2} = 3, q_{2,3} = 7, q_{3,2} = 4, q_{3,1} = 2.$$

   (a) Determinare se il tempo medio di ritorno nello stato 1 eccede $\frac{5}{6}$. Risposta. Una risposta immediata e possibile dato che il suddetto tempo deve includere il tempo trascorso in 1 prima di saltare in 2 all'inizio del ciclo tra due ritorni in 1 e il tempo trascorso in 3 prima di tornare in 1 alla fine del ciclo. Questi sono esponenziali di medie rispettivamente $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$, indipendenti dalla lunghezza del ciclo, quindi questa in media dura almeno $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$. Alternativamente si determina la distribuzione invariante λ dal sistema $\lambda Q = 0$, che e il seguente

$$3\lambda_1 = 2\lambda_3, 7\lambda_2 = 6\lambda_3,$$

   da cui $53\lambda_1 = 14, 53\lambda_2 = 18, 53\lambda_3 = 21$. Dato che $q_1 = 3$, si ha che il tempo di ritorno in 1 risulta essere $m_1 = \frac{1}{\lambda_1 q_1}$, nel caso in esame $\frac{53}{42}$, certamente superiore a $\frac{5}{6}$.

   (b) Determinare se in media il tempo trascorso in 2 tra una visita e l'altra allo stato 1 supera il tempo trascorso in 3. Risposta. Anche questa risposta si puo dare in modo elementare: il numero delle volte che la catena salta in 2 prima di tornare in 1 risulta uguale al numero delle volte che salta in 3, pero ogni tempo di tenuta in 2 ha una media media $\frac{1}{7}$, mentre quello di tenuta in 3 ha media $\frac{1}{2}$, quindi il tempo trascorso in 3 deve essere in media maggiore. Piu precisamente dato che il tempo medio trascorso in j prima del ritorno in i soddisfa a $\mu_j^i = \lambda_j m_i$ la conclusione si puo anche dedurre dal fatto che $\lambda_3 > \lambda_2$.

   (c) Partendo da uno stato qualsiasi, determinare se asintoticamente la proporzione di tempo trascorsa nello stato 2 supera quella trascorsa altrove. Risposta. Qui si invoca il teorema ergodico, la catena si trova nello stato 2 i $\frac{18}{53}$ del tempo, quindi si trova piu frequentemente altrove.

2. Si consideri un sistema costituito da due componenti i cui tempi di vita passano per un certo numero di fasi, tutte indipendenti tra di loro, con la stessa legge esponenziale. Il tempo di vita del primo componente consta di 3 fasi, mentre il tempo di vita del secondo solo di 2. Il sistema rimane in vita fintanto che una delle due componenti si rompe.

   (a) Modellizzare lo stato del sistema come una catena di Markov e determinarne la Q-matrice. Conviene associare uno stato ad ogni coppia che precisa la fase della vita in cui si trova ciascun componente. Convenzionalmente sia quindi $0 = (3, 2)$, lo stato di inizio, $1 = (2, 2)$, $2 = (1, 2)$, $3 = (3, 1)$, $4 = (2, 1)$ e $5 = (1, 1)$, oltre agli stati assorbenti $R1$ e $R2$ in cui il sistema si rompe a causa del primo o del secondo componente. Le componenti extra-diagonali non nulle della Q sono tutte uguali per le coppie di stati

$$(0, 1), (1, 2), (2, R1), (0, 3), (1, 4), (2, 5), (3, 4), (4, 5), (5, R1), (3, R2), (4, R2), (5, R2),$$

che senza perdita di generalita poniamo uguali a 1.

(b) Calcolare il tempo medio di vita del sistema. Risposta. Si deve determinare la soluzione di $(Qk)(i) = -1$, per $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, avendo posto $k_{R1} = k_{R2} = 0$. Precisamente

$$2k_5 = 1, 2k_4 = 1+k_5, 2k_2 = 1+k_5, 2k_3 = 1+k_4, 2k_1 = 1+k_2+k_4, 2k_0 = 1+k_1+k_3,$$

da cui

$$k_5 = \frac{1}{2}, k_4 = k_2 = \frac{1}{2} + \frac{k_5}{2} = \frac{3}{4}, k_3 = \frac{1}{2} + \frac{k_4}{2} = \frac{7}{8}$$
$$k_1 = \frac{1}{2} + \frac{k_2}{2} + \frac{k_4}{2} = \frac{5}{4}, k_0 = \frac{1}{2} + \frac{k_1}{2} + \frac{k_3}{2} = \frac{25}{16}.$$

Se λ e il rate comune a tutte le fasi della vita dei componenti, questo risultato va diviso per λ.

(c) Calcolare la probabilita che il secondo componente si guasti prima del primo. Risposta. Conviene calcolare $h_i = h_i^{R1}$, risolvendo $(Qh)(i) = 0$, con $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ con $h_{R1} = 1$ e $h_{R2} = 0$. Si ha

$$2h_5 = 1, 2h_4 = k_5, 2h_2 = 1 + h_5, 2h_3 = h_4, 2h_1 = h_2 + h_4, 2h_0 = h_1 + h_3,$$

da cui

$$h_5 = \frac{1}{2}, h_4 = \frac{1}{4}, h_2 = \frac{3}{4}, h_3 = \frac{1}{8}, h_1 = \frac{1}{2}, h_0 = \frac{5}{16}.$$

La probabilita richiesta e quindi $\frac{11}{16}$.

3. Si consideri una fila d'attesa che si comporta alternando delle fasi di arrivo, in cui i clienti arrivano secondo un arbitrario processo di nascita (quindi, se ci sono i clienti in attesa, il rate di arrivo del successivo e λ_i) e non ha luogo nessun servizio, e fasi di servizio in cui i clienti eventualmente arrivati durante la precedente fase di arrivo vengono serviti uno ad uno da un solo servente con tempi esponenziali di parametro 1 indipendenti, e non ha luogo nessun arrivo fino a che la fila si vuota. La durata di ciascuna fase di arrivo, indipendente dalle precedenti e dal processo degli arrivi e dei servizi, ha legge esponenziale di parametro r.

   (a) Descrivere la fila di attesa come un processo di Markov e determinarne la Q-matrice. Risposta. Per distinguere i due casi in cui ci sono $i > 0$ clienti in attesa (compresa quella servita) chiamiamo i lo stato in cui ci sono i clienti in fase di arrivo e $-i$ lo stato in cui ci sono i persone. In questo modo gli elementi extra-diagonali non nulli della matrice Q sono

$$q_{i,i+1} = \lambda_i, q_{-(i+1),-i} = 1, i \geq 0, q_{i,-i} = r, i > 0.$$

   (b) Determinare per quali successioni $\{\lambda_i, i = 0, 1, \ldots\}$ la catena risulta ricorrente. Risposta. Dato che la catena risulta irriducibile, consideriamo il tempo di ritorno in 0. Se il processo degli arrivi e un processo di nascita non esplosivo e chiaro che nel tempo esponenziale di durata di una fase di arrivo il processo passa da positivo a negativo e poi eventualmente si azzera. Se invece il processo di nascita e esplosivo e chiaro che con probabilita positiva il tempo di esplosione puo essere minore del tempo di durata di una fase di arrivo (dato che sono indipendenti), quindi con probabilita positiva il processo esplode: in questo caso la catena e necessariamente transiente. Alternativamente, sia h_i la probabilita di toccare 0 partendo da i. Evidentemente $h_i = 0$ se i e negativo o nullo. Altrimenti per i positivo

$$(\lambda_i + r)h_i = \lambda_i h_{i+1} + r.$$

Conviene porre $y_i = 1 - h_i$, in modo da ottenere $y_{i+1} = (1 + \frac{r}{\lambda_i})y_i$, da cui ancora $y_n = \prod_{i=1}^{n-1}(1 + \frac{r}{\lambda_i})y_1$. Sara $y_1 > 0$ a patto che $\prod_{i=1}^{\infty}(1 + \frac{r}{\lambda_i}) > 0$ che avviene precisamente quando $\sum_{i=1}^{\infty} = \frac{1}{\lambda_i} < \infty$, ritrovando la conclusione gia esposta.

(c) Determinare per quali successioni $\{\lambda_i, i = 0, 1, \ldots\}$ la catena risulta ricorrente positiva. Risposta. Una misura invariante π deve soddisfare

$$\pi_i(\lambda_i + r) = \pi_{i-1}\lambda_{i-1}, i = 1, 2, \ldots$$

e quindi

$$\pi_n = \frac{\lambda_{n-1} \ldots \lambda_0}{(\lambda_n + r) \ldots (\lambda_1 + r)}\pi_0, n = 1, 2, \ldots.$$

D'altra parte $\pi_{-1} = \lambda_0\pi_0$ e

$$\pi_{-i} = \pi_{-(i+1)} + r\pi_i, i = 1, 2, \ldots$$

che si risolve per induzione

$$\pi_{-n} = \frac{\lambda_n \ldots \lambda_1\lambda_0}{(\lambda_n + r) \ldots (\lambda_1 + r)}\pi_0, n = 2, 3, \ldots$$

Condizione necessaria e sufficiente per la ricorrenza positiva e quindi che

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n-1} \ldots \lambda_0}{(\lambda_n + r) \ldots (\lambda_1 + r)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n\lambda_{n-1} \ldots \lambda_0}{(\lambda_n + r) \ldots (\lambda_1 + r)} < \infty$$

che equivale a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n \ldots \lambda_1}{(\lambda_n + r) \ldots (\lambda_1 + r)} < \infty.$$