Exercises from J.R. Norris' Markov Chains

Section 1.1

1. Dalla cosiddetta legge delle alternative

$$P(A) = \sum_n P(A|B_n)P(B_n) = \sum_n pP(B_n) = p$$

Inoltre se per ogni x

$$P(X = x|Y = y) = f(x), \forall y : P(Y = y)$$

allora $f(x) = P(X = x)$ e quindi X e Y sono indipendenti. Il viceversa dovrebbe essere ben noto.

2. Si ottiene scrivendo la funzione di massa congiunta di $(X_0, X_1, ..., X_k, ..., X_{kN})$ in termini di λ e P (Theorem 1.1.1) e poi marginalizzando su

$$\left(X_1, ..., X_{k-1}, X_{k+1}, ..., X_{2k-1}, ..., X_{(k-1)N+1}, ..., X_{kN-1}\right).$$

Alternativamente si possono usare la proprietà di Markov (Theorem 1.1.2) e il Theorem 1.1.3.(ii) per provare direttamente che la condizione (ii) della definizione di catena di Markov è verificata.

3. Nel testo manca l'ipotesi che $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ sia indipendente da X_0. Dato che Y_{n+1} è indipendente da $(X_0, ..., X_{n-1}, X_n)$ (che è funzione di $(X_0, Y_1, ..., Y_n)$) la distribuzione di X_{n+1} condizionata a $X_n = i$ e a valori fissati qualunque per $(X_0, ..., X_{n-1})$ è la stessa di $g(i, Y_1)$, quindi non dipende da questi valori. Tutte le catene di Markov possono essere realizzate in questo modo, perchè una qualsiasi distribuzione di probabilità (in particolare discreta) può essere ottenuta da una funzione (a gradino) di una variabile uniforme in $[0, 1]$. Per quanto riguarda la seconda parte dell'esercizio: (a) $(Z_n)_{n\geqslant 0}$, essendo una successione i.i.d., è una catena di Markov con

$$P(Z_{n+1} = j|Z_n = i) = (1-p)\,\delta_{j,0} + p\delta_{j,1}$$

(b) $(S_n)_{n\geqslant 0}$, essendo un processo a incrementi indipendenti, è una catena di Markov con

$$P(S_{n+1} = j|S_n = i) = P(S_{n+1} - S_n = j - i|S_n = i) = (1-p)\,\delta_{j,i} + p\delta_{j,i+1}$$

(d) $(S_n, S_0 + ... + S_n)_{n\geqslant 0}$ è una catena di Markov dato che la prima componente, che è Markov per conto suo, è l'incremento della seconda, e quindi

$$P(S_{n+1} = j_1, S_0+...+S_n = j_2|S_n = i_1, S_0+...+S_n = i_2) = (1-p)\,\delta_{j_1,i_1}\delta_{j_2,i_2+i_1} + p\delta_{j_1,i_1+1}\delta_{j_2,i_2+i_1+1}.$$

Nel caso (c) invece si consideri

$$\begin{aligned} P(X_4 &= 4|X_3 = 3, X_2 = 2, X_1 = 1) = P(X_4 = 4|S_i = 1, i = 1, 2, 3) \\ &= P(S_4 = 1|S_i = 1, i = 1, 2, 3) = 1 - p \end{aligned}$$

mentre

$$\begin{aligned} P(X_4 &= 4|X_3 = 3, X_2 = 1, X_1 = 0) = P(X_4 = 4|S_3 = 2, S_2 = 1, S_1 = 0) \\ &= P(S_4 = 1|S_3 = 2, S_2 = 1, S_1 = 0) = 0 \end{aligned}$$

che prova che $(S_0 + ... + S_n)_{n\geqslant 0}$ non è una catena di Markov.

4. Nella prima situazione la posizione della mosca è una catena di Markov con matrice di transizione
$$p_{ij} = \frac{1}{2}\left(1 - \delta_{i,j}\right),$$
che ha autovalori 1 (semplice) e $-\frac{1}{2}$ (doppio). Di conseguenza possiamo scrivere
$$p_{11}^{(n)} = A + B\left(-\frac{1}{2}\right)^n + Cn\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$
ed i valori di A, B e C si ottengono dai valori di $p_{11}^{(n)}$ per $n = 0, 1$ e 2 che danno rispettivamente le equazioni
$$A + B = 1, A - \frac{B}{2} - \frac{C}{2} = \frac{1}{2}, A + \frac{B}{4} + \frac{C}{2} = \frac{1}{4}$$
da cui $A = \frac{1}{3}, B = \frac{2}{3}, C = 0$. Nella seconda situazione la posizione della mosca ha invece matrice di transizione
$$p_{i,i+1} = \frac{2}{3}, p_{i,i-1} = \frac{1}{3}, i = 1, 2, 3$$
ove la somma e la differenza vanno intese modulo 3. Gli autovalori sono stavolta 1 e $-\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{6}i = 3^{-1/2}e^{\pm i\frac{2}{3}\pi}$ per cui
$$p_{11}^{(n)} = A + 3^{-n/2}\left(B\cos\frac{2n\pi}{3} + C\sin\frac{2n\pi}{3}\right)$$
dove $A = \frac{13}{27}$, $B = \frac{14}{27}$ e $C = -\frac{4}{9}\sqrt{3}$ si ottengono da $p_{11}^{(0)} = 1$, $p_{11}^{(1)} = 0$ e $p_{11}^{(2)} = \frac{4}{9}$.

5. Il punteggio del dado $(X_n)_{n\geqslant 0}$ è una catena di Markov con matrice di transizione
$$p_{ij} = \frac{1}{5}(1 - \delta_{i,j})$$
Se $Y_n = 6\delta_{X_n,6}$ si verifica facilmente che $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ è una catena di Markov sugli stati $I = \{0, 6\}$ con matrice di transizione
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$
Di conseguenza (pagina 5) $p_{66}^{(n)} = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^n$, mentre, per ovvie ragioni di simmetria
$$p_{61}^{(n)} = \frac{1}{5}\left(1 - p_{66}\right) = \frac{1}{6} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{5}\right)^n.$$

La seconda questione si risolve esprimendo sia il punteggio del primo dado X_n che quello del secondo Z_n in funzione di una stessa successione $(W_n)_{n\geqslant 1}$ di variabili aleatorie i.i.d. uniformi tra 1 e 5, nel modo seguente

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n + W_{n+1} \pmod 6 \\ Z_{n+1} &= Z_n + W_{n+1} + 1 \pmod 6 \end{aligned}$$

di modo che $Z_n = X_n + n \pmod 6$, dato che $X_0 = Z_0 = 6$. Quindi le probabilità di transizione $\widetilde{p}^{(n)}$ di $(Z_n)_{n\geqslant 0}$ sono date da

$$\widetilde{p}^{(n)}_{66} = p^{(n)}_{6,6-n \pmod 6} = \begin{cases} p^{(n)}_{66}, & n \text{ multiplo di } 6 \\ p^{(n)}_{61}, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

6. La matrice di transizione proposta ha gli autovalori 1, $\frac{5}{6}$ e $-\frac{1}{4}$. Si scrive $p^{(n)}_{11} = A + B\left(\frac{5}{6}\right)^n + C\left(-\frac{1}{4}\right)^n$. Posto $p^{(0)}_{11} = 1$, $p^{(1)}_{11} = \frac{1}{2}$ e $p^{(2)}_{11} = \frac{1}{2}$ si ottiene $A = 0$, $B = \frac{9}{13}$ e $C = \frac{4}{13}$. Inoltre $P_{n+1}(A) = 1 - p^{(n)}_{11}$. Chiaramente questa successione non può mai essere ottenuta da una catena di Markov a due stati, per la presenza simultanea di termini geometrici con due tassi differenti.

7. (a) Nel primo caso gli autovalori della matrice di transizione sono 1, $-\frac{1}{4}$ e $-\frac{1}{12}$, da cui $p^{(n)}_{11} = A + B\left(-\frac{1}{4}\right)^n + C\left(-\frac{1}{12}\right)^n$. Dato che $p^{(0)}_{11} = 1$, $p^{(1)}_{11} = p^{(2)}_{11} = 0$ si ha $A = \frac{1}{65}$, $B = -\frac{2}{5}$ e $C = \frac{18}{13}$. (c) Nel terzo caso sono 1 e $-\frac{1}{6}$ (doppio), da cui $p^{(n)}_{11} = A + B\left(-\frac{1}{6}\right)^n + Cn\left(-\frac{1}{6}\right)^n$, con gli stessi valori iniziali, da cui $A = \frac{1}{49}$, $B = \frac{48}{49}$ e $C = -\frac{6}{7}$. (b) Nel secondo caso sono 1, $-\frac{1}{6} \pm \frac{1}{6}i = \frac{1}{3\sqrt{2}}e^{\pm i\frac{3}{4}\pi}$ e quindi

$$p^{(n)}_{11} = A + 3^{-n}2^{-n/2}\left(B\cos\frac{3n\pi}{4} + C\sin\frac{3n\pi}{4}\right)$$

con $A = \frac{1}{25}$, $B = \frac{24}{25}$ e $C = \frac{18}{25}$.

Section 1.2

1. Le classi comunicanti sono $\{3\}$, costituita uno stato assorbente, $\{1, 5\}$, anch'essa chiusa e $\{2, 4\}$, che non è chiusa perchè 4 porta a 3 e a 5.

2. Sia C_1 una classe comunicante. Se non è chiusa esiste uno stato di C_1 che porta ad un'altra classe, diciamo C_2. Se a sua volta questa non è chiusa esiste uno stato di C_2 che porta ad uno stato di un'altra classe diversa da C_1 (altrimenti C_1 potrebbe essere allargata ad una classe comunicante più grande). Ovviamente quando si arriva all'ultima classe comunicante si ottiene una contraddizione.

Section 1.3

1. Ovviamente il problema può essere ridotto per la soluzione del punto (a). La classe chiusa costituita da $\{1, 2, 3\}$ è rimpiazzata da un unico stato 1 e la classe chiusa costituita da $\{4, 5, 6\}$ è rimpiazzata da un unico stato 6. A questo punto le probabilità

$h_1^6 = 0$ e $h_6^6 = 1$ di toccare 6 permettono di scrivere $h_0^6 = \frac{1}{5}h_0^6 + \frac{1}{5}$, da cui $h_0^6 = \frac{1}{4}$. Mentre $h_1^3 = 1$. Per il punto (b) ci si può limitare alla classe chiusa $\{1, 2, 3\}$. Le probabilità di toccare 3 soddisfano $h_3^3 = 1$, $h_2^3 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}h_1^3$ e $h_1^3 = h_2^3$, da cui $h_1^3 = 1$. Invece i tempi medi per toccare 3 soddisfano $k_3^3 = 0$, $k_2^3 = 1 + \frac{1}{3}k_1^3$ e $k_1^3 = 1 + k_2^3$, per cui $k_2^3 = 2$ e $k_1^3 = 3$.

2. Dato che lo stato di partenza è 2, è facile vedere che possiamo limitarci ad un capitale pari. Con $h_{10}^{10} = 1$ le altre probabilità di raggiungere £10 di capitale si ottengono da

$$h_2^{10} = \frac{1}{2}h_4^{10}, h_4^{10} = \frac{1}{2}h_8^{10}, h_8^{10} = \frac{1}{2}h_6^{10} + \frac{1}{2}, h_6^{10} = \frac{1}{2}h_2^{10} + \frac{1}{2}$$

da cui

$$h_2^{10} = \frac{1}{5}, h_4^{10} = \frac{2}{5}, h_6^{10} = \frac{3}{5}, h_8^{10} = \frac{4}{5}.$$

Il numero medio di lanci fino alla fine del gioco si ottiene da $k_0 = k_{10} = 0$ e

$$k_2 = 1 + \frac{1}{2}k_4, k_4 = 1 + \frac{1}{2}k_8, k_8 = 1 + \frac{1}{2}k_6, k_6 = 1 + \frac{1}{2}k_2$$

da cui

$$k_2 = k_8 = \frac{8}{5}, k_4 = k_6 = \frac{9}{5}.$$

3. E' chiaro che basta limitarsi agli stati 1, 4, 5, 7 e 9. L'ultimo stato è assorbente. I tempi medi di assorbimento soddisfano al sistema

$$\begin{aligned} k_7 &= 1 + \frac{1}{2}k_4, k_5 = 1 + \frac{1}{2}k_7 + \frac{1}{2}k_1, \\ k_4 &= 1 + \frac{1}{2}k_5 + \frac{1}{2}k_1, k_1 = 1 + \frac{1}{2}k_7 + \frac{1}{2}k_5 \end{aligned}$$

da cui $k_1 = k_5 = 7$, $k_4 = 8$ e $k_7 = 5$. Bisogna rendere lo stato 1 assorbente e risolvere quindi

$$h_7 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h_4, h_5 = \frac{1}{2}h_7, h_4 = \frac{1}{2}h_5$$

da cui $h_7 = \frac{4}{7}$, $h_5 = \frac{2}{7}$ e $h_4 = \frac{1}{7}$.

4. La quantità $\frac{q_i}{p_i} = \left(\frac{i}{i+1}\right)^2$, quindi $\gamma_i = \prod_{j=1}^{i}\left(\frac{j}{j+1}\right)^2 = \frac{1}{(i+1)^2}$ e $\sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}$. La probabilità di assorbimento in 0 partendo da 1 (cui si accede immediatamente partendo da 0) è quindi $h_1^0 = \frac{6}{\pi^2}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{(i+1)^2}$, quindi la probabilità di non tornare in 0 è $\frac{6}{\pi^2}$.

Section 1.4.

1. Conviene scrivere H_1^0 piuttosto che H_0, in armonia con la Sezione 1.3. Innanzitutto, per la legge delle alternative

$$\begin{aligned} \phi(s) &= \frac{1}{2}E(s^{H_1^0}|X_1 = 0) + \frac{1}{2}E(s^{H_1^0}|X_1 = 2) \\ &= \frac{s}{2} + \frac{s}{2}E_2(s^{H_1^0}|X_1 = 2) = \frac{s}{2}\left(1 + E_2\left(s^{H_2^0}\right)\right) \end{aligned}$$

dato che, per la propretà di Markov, condizionalmente a $X_1 = 2$, $H_1^0 = 1 + \overline{H}_2^0$, dove $\overline{H}_2^0$ ha la stessa distribuzione di H_2^0 sotto P_2. D'altra parte, per la proprieta di Markov forte ad H_2^1, $H_2^0 = H_2^1 + \overline{H}_1^0$, dove, condizionalmente a $H_2^1 < \infty$, $\overline{H}_1^0$ è indipendente da H_1^2 ed ha la stessa distribuzione di H_1^0. Quindi

$$E_2(s^{H_2^0}) = E_2(s^{H_2^1})E_1(s^{H_1^0}) = \phi\left(s\right)^2 \text{ e } \phi(s) = \frac{s}{2}\left(1 + \phi\left(s\right)^2\right)$$

che ha l'unica soluzione accettabile (continua per s e con $\phi(0) \leq 1$) uguale a

$$\phi(s) = s^{-1}\left(1 - \sqrt{1 - s^2}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} s^i \frac{(2i-1)!!}{2^i i!}$$

da cui $P(H_1^0 = i) = \frac{(2i-1)!!}{2^i i!}, i = 1, 2, ...$ Se la distribuzione di Y_1 cambia come indicato, si ha innanzi tutto che $E(s^{H_1^0}|X_1 = 2)$ è rimpiazzato da

$$E(s^{H_1^0}|X_1 = 3) = sE_3(s^{H_3^0}).$$

Ora $H_3^0 = H_3^2 + \overline{H}_2^0$ dove, condizionalmente a $H_3^2 < \infty$, $\overline{H}_2^0$ ha la stessa distribuzione di H_2^0 sotto P_2. Infine $H_2^0 = H_2^1 + \overline{H}_1^0$ dove, condizionalmente a $H_2^1 < \infty$, $\overline{H}_1^0$ ha la stessa distribuzione di H_1^0 sotto P_1, applicando due volte la proprietà di Markov forte. Quindi $E_3(s^{H_3^0}) = E_3\left(s^{H_3^2}\right)E_2\left(s^{H_2^1}\right)E_1\left(s^{H_1^0}\right) = \phi^3\left(s\right)$. Infine per la legge delle alternative

$$\phi(s) = \frac{s}{2}\left(1 + \phi\left(s\right)^3\right)$$

come richiesto.

2. Dato che $h_i^j = P_i\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{j,n}\right)$, con

$$A_{j,n} = \{\ X_n = j, X_m \notin J, m = 1, ..., n-1\}$$

si ha che

$$\begin{aligned} P_i(\cup_{n=1}^{\infty} A_{j,n}) &= p_{ij} + \sum_{k \notin J} p_{ik} P_i(\cup_{n=1}^{\infty} A_{j,n}|X_1 = k) \\ &= p_{ij} + \sum_{k \notin J} p_{ik} P_k(\cup_{n=1}^{\infty} A_{j,n}) \end{aligned}$$

per la proprietà di Markov. Sia ora $(x_i, i \in I)$ una soluzione non negativa al sistema di equazioni. Per sostituzioni successive si ha, per ogni intero positivo N

$$x_i = \sum_{n=1}^{N} P_i(A_{j,n}) + \sum_{k_1 \notin J} ... \sum_{k_N \notin J} p_{ik_1} ... p_{k_{N-1}k_N} x_{k_N}$$

che implica $x_i \geq \sum_{n=1}^{N} P_i(A_{j,n})$. Passando al limite su N si ottiene come richiesto

$$x_i \geq \sum_{n=1}^{\infty} P_i(A_{j,n}) = P_i\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_{j,n}\right) = h_i^j.$$

Section 1.5

1. La classe $\{2,4\}$, non essendo chiusa, è transitoria, le altre sono chiuse e quindi ricorrenti.

2. Conviene direttamente distinguere il caso $0<\alpha\leq 1$ da quello $\alpha>1$. Analogamente a quanto fatto nell'esercizio 1.2.4 si mostra che $P_1\left(H^0<\infty\right)=1$ nel primo caso e $P_1\left(H^0<\infty\right)<1$ nel secondo. Ma allora la stessa disuguaglianza/uguaglianza vale per

$$f_1=P_1\left(T_1<\infty\right)=q_1+p_1P_2\left(H^1<\infty\right)=q_1+p_1P_1\left(H^0<\infty\right)$$

   Quindi, a seconda di due casi, la catena è ricorrente/transitoria (dato che è ovviamente irriducibile). A seconda dei due casi, quindi, $P_i\left(V_i=\infty\right)=1$ oppure $P_i\left(V_i=\infty\right)=0$, per ogni intero i. E' facile vedere che le stesse probabilità valgono sotto $P=P_0$, dato che per la proprietà di Markov forte a T_i

$$P\left(V_i=\infty\right)=P\left(V_i=\infty,T_i<\infty\right)=P\left(T_i<\infty\right)P_i\left(V_i=\infty\right)$$

   Notiamo ora l'eguaglianza tra gli eventi $\{\lim_n X_n=\infty\}=\{V_i<\infty,i=0,1,...\}$. Ora se $P\left(V_i=\infty\right)=1$ è chiaro che $P\left(\lim_n X_n=\infty\right)=0$ che vale nel caso $0<\alpha\leq 1$. Nel caso $\alpha>1$ osserviamo

$$P\left(V_i<\infty,i=0,1,...\right)=1-P\left(\cup_i\left\{V_i=\infty\right\}\right)\geq 1-\sum_i P\left(V_i=\infty\right)=1$$

   che prova che $P\left(\lim_n X_n=\infty\right)=1$.

3. L'identità si ottiene dalla proprietà di Markov forte all'istante T_j, essendo per definizione $X_{T_j}=j$

$$P_i\left(X_n=j\right)=\sum_{k=1}^{n}P_i\left(T_j=k\right)P_j\left(X_{n-k}=j\right).$$

   Moltiplicando questa uguaglianza per s^n, sommando su $n=1,2,...$ e aggiungendo il termine $\delta_{ij}=P_i\left(X_0=j\right)$ si ottiene l'identità richiesta per s positivo (convergenza monotona e teorema di Fubini per scrivere

$$\sum_{n=1}^{\infty}s^n\sum_{k=1}^{n}f_{ij}^{(k)}p_{jj}^{(n-k)}=\sum_{k=1}^{\infty}f_{ij}^{(k)}s^k\sum_{m=0}^{\infty}p_{jj}^{(m)}s^m,$$

   avendo posto $m=n-k$). Infine dato che $f_i=\lim_{s\uparrow 1}F_{ii}(s)$ e

$$\sum_{m=0}^{\infty}p_{ii}^{(m)}=\lim_{s\uparrow 1}P_{ii}(s)=\lim_{s\uparrow 1}\left(1-F_{ii}(s)\right)^{-1}=\frac{1}{1-f_i}$$

   si ottiene l'ultima affermazione.

4. Chiaramente (F_n) non è una catena di Markov. Ad esempio se $F_{n-1}=0$ e $F_n=1$, allora $F_{n+1}=1$, mentre se $F_{n-1}=1$ e $F_n=1$, allora $F_{n+1}=0$ con probabilità $\frac{1}{2}$ e $F_{n+1}=0$ con probabilità $\frac{1}{2}$. Se ne deduce che F_{n+1} e F_{n-1} non sono indipendenti

condizionalmente a $F_n = 1$. Invece, evidentemente (F_{n-1}, F_n) è una catena di Markov. Dallo stato $1 = (1,1)$ con probabilità $\frac{1}{2}$ si va in $2 = (1,2)$, mentre con probabilità $\frac{1}{2}$ si va in $0 = (1,0)$, mentre da 2 con probabilità $\frac{1}{2}$ si va in $3 = (2,3)$ e con probabilità $\frac{1}{2}$ si va in $4 = (2,1)$. Da 4 con probabilità $\frac{1}{2}$ si torna in 1 e con probabilità $\frac{1}{2}$si va in $5 = (1,3)$. La probabilità richiesta non è altro che la probabilità che una catena di Markov (Y_n) che evolve su $\{0,1,2,3,4,5\}$ con le probabilità di transizione su indicate, partendo da 1 arrivi in $\{3,5\}$ senza toccare 0. Sia questa probabilità h_1 e sia h_2 la stessa probabilità partendo da 2 e da 4. Allora

$$h_1 = \frac{1}{2}h_2, h_2 = \frac{1}{2}h_4 + \frac{1}{2}, h_4 = \frac{1}{2}h_1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}h_2 + \frac{1}{2}$$

da cui

$$h_2 = \frac{1}{8}h_2 + \frac{3}{4}, h_2 = \frac{6}{7}, h_1 = \frac{3}{7}.$$

Per andare avanti occorre studiare le classi comunicanti della catena su $\mathbf{N}^2 \diagdown \{(0,0)\}$. A questo fine cominciamo ad osservare che, per $ij \neq 0$, le terne di coppie distinte (i,j), $(j, i+j)$ e $(i+j, i)$ sono collegate da un 3-ciclo orientato nel grafo associato alla catena. La terna $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ ha archi con peso unitario tranne quello che esce da $(1,1)$ (che ha peso $\frac{1}{2}$), mentre tutte le altre hanno archi con peso $\frac{1}{2}$. Dato che nel grafo ogni coppia di interi positivi ha due archi che escono e due che entrano, e un arco uscente ed uno entrante insistono su vertici della terna cui (i,j) appartiene, mentre le altre due insistono su una terna differente, queste terne sono collegate da strutture ad albero binario (omogeneo). La terna anzidetta ha il ruolo di radice dell'albero. Una terna che ci interessa particolarmente è $(1,1)$, $(1,2)$ e $(2,1)$, che è l'unica ad essa connessa (mediante $(1,1)$) dell'albero. Dato che 1 e 2 sono primi tra loro, è chiaro che questi stati portano solo a coppie (i,j) con i e j primi tra loro. Viceversa, partendo da una coppia (i,j) con i e j primi tra loro, iterando l'operazione di shiftare la seconda componente nella prima posizione e di portare nella seconda la differenza in valore assoluto tra le due componenti, in un numero finito di passi si arriva ad azzerare la seconda componente, visto che il massimo tra le due componenti diminuisce ad ogni iterazione. Ma questo implica il passaggio per $(1,1)$ (dato che (k,k) con $k > 1$ è vietato per quanto detto sopra). Quindi la catena $(X_n)_{n \geqq 0}$ sulle coppie di interi positivi primi tra loro e gli stati $(1,0)$, $(0,1)$ e $(1,1)$ è irriducibile. Se proviamo che la hitting probability richiesta è minore di 1, ne dedurremo che $(X_n)_{n \geqq 0}$ è transitoria. Sia ora h_{ij} la probabilità di ritornare in $(1,1)$ partendo da (i,j). Allora

$$h_{12} = \frac{1}{2}h_{21} + \frac{1}{2}h_{23}, h_{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h_{13}.$$

Utilizzando la proprietà di Markov forte e l'omogeneità dell'albero si ha che

$$h_{23} = h_{12}^2, h_{13} = h_{12}h_{21}$$

da cui

$$h_{12} = \frac{1}{2}h_{21} + \frac{1}{2}h_{12}^2, h_{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}h_{12}h_{21}$$

che, posto $h_{12} = x$, equivale a

$$x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{(2-x)}$$

cioè
$$x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x-1)\left(x^2 - 3x + 1\right) = 0$$
che ha come radici 1, $\frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{5}$. Con l'ormai usuale argomento si mostra che la più piccola è quella giusta, confermando quanto scritto nel testo. Per provare che $F_n \to \infty$, equivalentemente che $X_n \to \infty$ per $n \to \infty$, si prova prima che per ogni intero M, qualunque sia lo stato di partenza, si ha che l'hitting time $H^{S_{\geq(M,M)}}$ del settore $S_{\geq(M,M)} = \{(i,j) : i \geq M, j \geq M\}$ è finito con probabilità 1. Infatti, per la transienza, $\left\{H^{S_{\geq(M,M)}} = \infty\right\} \subset \{F_n \geq M \text{ i.o.}\}$. Dato che qualunque sia la coppia (F_{n-1}, F_n) rimane una probabilità $\frac{1}{2}$ di avere quale nuovo stato $(F_n, F_n + F_{n-1}) \geq (M, M)$, per la proprietà di Markov forte, a meno di insiemi di probabilità nulla $\{F_n \geq M \text{ i.o.}\} \subset \left\{H^{S_{\geq(M,M)}} < \infty\right\}$, una contraddizione. Ora, abbiamo già visto che per ogni coppia (i,j) c'è una probabilità positiva di rimanere indefinitamente nel sottoalbero di triple sotteso a (i,j). Ma se $i \geq M, j \geq M$, dato che i nodi del sottoalbero indotto hanno coordinate che si ottengono da i e j solo con operazioni di somma (o di shift), allora qualsiasi nodo del sottoalbero ha entrambe le coordinate almeno uguali ad M. Dato che ad ogni visita di $S_{\geq(M,M)}$ ho sempre una stessa probabilità positiva di rimanere nel sottoalbero indefinitamente, per la proprietà di Markov forte con probabilità 1 la catena si "infilerà" in uno di questi sottoalberi e quindi con probabilità 1 F_n rimarrà definitivamente non minore di M. Per l'arbitrarietà di M si conclude.

Section 1.6

1. In un passo la catena si sposta dalla radice al vertice, diciamo 1. Calcoliamo la probabilità h_1^R di tornare alla radice dal vertice 1. Per la legge delle alternative e la proprietà di Markov si avrà
$$h_1^R = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}h_2^R + \frac{1}{3}h_3^R$$
dove 2 e 3 sono gli stati dell'albero cui porta 1 (diversi dalla radice). Per simmetria $h_3^R = h_2^R$, e per la proprietà di Markov forte a H^1 sotto P_2 si ha $h_2^R = \left(h_1^R\right)^2$, per cui h_1^R è la più piccola soluzione positiva di $2x^2 - 3x + 1 = 0$, cioè $\frac{1}{2}$. Se ne deduce che la catena, che ovviamente è irriducibile, è transitoria.

2. Il modo più semplice di dimostrare questo è utilizzare un argomento che funziona per provare la transienza del SRW per induzione per tutte le dimensioni da 3 in poi. Sia (X_n) un SRW su $\mathbf{Z}^4$ e sia (Y_n) la sua proiezione sulle prime tre componenti. Ovviamente (Y_n) è una catena di Markov con le probabilità di transizione
$$p_{i_1 j_1 k_1 l_1, i_2 j_2 k_2 l_2} = \begin{cases} \frac{1}{8}, |i_1 - i_2| + |j_1 - j_2| + |k_1 - k_2| = 1 \\ \frac{1}{4}, i_1 = i_2, j_1 = j_2, k_1 = k_2 \end{cases}$$
Dal risultato dell'Esempio 1.4.4, seconda parte, si deduce che (Y_n), che non è un SRW su $\mathbf{Z}^3$, diventa tale se lo si considera solo quando si muove. E' chiaro quindi che condivide con il SRW su $\mathbf{Z}^3$ la transienza. Dato che se (X_n) fosse ricorrente a fortiori anche (Y_n) dovrebbe essere tale, deduciamo che (X_n) è anch'essa transiente.

Section 1.7

1. Dato che 3 è uno stato assorbente, la distribuzione δ_3, che pone una massa unitaria sullo stato 3, è invariante. Ugualmente, se si considera la classe chiusa $\{1,5\}$ come una catena a sè stante, questa ha l'unica legge invariante che è uniforme sui due stati, quindi $u_{1,5} = \frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_5)$ è invariante. E' possibile che una distribuzione stazionaria dia massa positiva alla classe transitoria $\{2,4\}$? No, perché la probabilità di trovarsi in questa classe diminuisce col tempo (dopo un passo, anche se ci si trova in 2, si può accedere a 4, e da qui in 3 e 5, da cui non rientra alcuna probabilità. La conclusione è che le misure stazionarie sono della forma

$$\alpha\delta_3 + (1-\alpha)\frac{1}{2}(\delta_1 + \delta_5),$$

con $\alpha \in [0,1]$, che rappresenta la probabilità di partire nello stato 3 al tempo 0 che ovviamente resta invariata nel tempo.

2. Si intende che ad ogni passo una molecola, scelta a caso tra le N nelle due scatole, passa da una scatola all'altra. E' chiaro che per determinare le probabilità di transizione in un passo, non serve sapere altro che il numero di molecole in una delle scatole, che quindi evolve come una catena di Markov con

$$p_{i,i-1} = \frac{i}{N}, p_{i-1,i} = \frac{N-i+1}{N}, i = 1, ..., N$$

Ovviamente la catena è irriducibile; l'unica distribuzione stazionaria π è caratterizzata quindi da

$$\pi_i = \frac{N-i+1}{N}\pi_{i-1} + \frac{i+1}{N}\pi_{i+1}, i = 0, ..., N$$

con la convenzione $\pi_{-1} = \pi_{N+1} = 0$. Partendo con $i = 0$ e 1, si può intuire la forma della soluzione $\pi_i = \binom{N}{i}\pi_0$, per $i = 1, 2, ..., N$, da cui, imponendo $1 = \sum_{i=0}^{N}\pi_i = \pi_0\sum_{i=0}^{N}\binom{N}{i}$, si ottiene $\pi_0 = 2^{-N}$ e finalmente $\pi_i = \binom{N}{i}2^{-N}$, la legge binomiale $\left(N, \frac{1}{2}\right)$.

3. La catena è ovviamente irriducibile e, essendo simmetrica, l'unica distribuzione invariante è $\pi_i = \frac{1}{8}$, per tutti gli stati i. Quindi $m_i = E_i(T_i) = 8$ per ogni i. Inoltre $\frac{1}{8} = \pi_o = \frac{\gamma_o^i}{m_i}$ e quindi $\gamma_o^i = 1$. Per rispondere all'ultima domanda dobbiamo invece invocare i risultati della Sezione 1.3. Osserviamo però per prima cosa che possiamo semplificare il problema guardando solo la distanza dal vertice o, che ovviamente è una catena di Markov. Il vertice iniziale è l'unico a distanza 3 da o. Allora $k_i^o = E_i(H^o)$ al variare di $i = 1, 2, 3$ soddisfa al sistema

$$k_1^o = 1 + \frac{2}{3}k_2^o, k_2^o = 1 + \frac{2}{3}k_1^o + \frac{1}{3}k_3^o, k_3^o = 1 + k_2^o$$

che ha l'unica soluzione $k_1^o = 7, k_2^o = 9, k_3^o = 10$, che è la risposta richiesta.

4. Innanzi tutto, dato che una misura invariante λ ha necessariamente la forma

$$\lambda_i = A + B\left(\frac{p}{q}\right)^i$$

se $\lambda_0 = 1$, allora $B = 1 - A$. Quindi dato che $p > q$ si ha che

$$\inf_{\lambda} \lambda_i = \begin{cases} 1, i > 0 \\ \left(\frac{p}{q}\right)^i = \left(\frac{q}{p}\right)^{|i|}, i < 0 \end{cases}$$

Calcoliamo ora γ_1^0. Si ha, utilizzando la proprietà di Markov al tempo 1

$$\gamma_1^0 = E_0\left(\sum_{n=1}^{T_0-1} 1_{\{X_n=1\}}\right) = p\left[1 + E_1\left(\sum_{n=1}^{T_0-1} 1_{\{X_n=1\}}\right)\right] = p\left(1 + x_1\right).$$

Ora, di nuovo utilizzando la proprietà di Markov al tempo 1, e poi la proprietà di Markov forte al tempo T_1 di primo ritorno in 1 che sappiamo, dato che $p > q$, sotto P_2 essere finito con probabilità $\frac{q}{p}$

$$\begin{aligned} x_1 &= pE_2\left(\sum_{n=1}^{T_0-1} 1_{\{X_n=1\}}\right) = pE_2\left(\sum_{n=1}^{T_0-1} 1_{\{X_n=1\}}\right) \\ &= pP_2\left(T_1 < \infty\right)\left[1 + E_1\left(\sum_{n=1}^{T_0-1} 1_{\{X_n=1\}}\right)\right] = q\left(1 + x_1\right) \end{aligned}$$

da cui $x_1 = \frac{q}{p}$ e $\gamma_1^0 = p\left(1 + \frac{q}{p}\right) = 1$. Proviamo ora induttivamente che $\gamma_i^0 = 1$ per qualunque i positivo. Supponiamo questo sia vero fino all'intero i. Allora, posto $\sum_{n=1}^{T_0-1} 1_{\{X_n=i\}} = V_i$

$$\gamma_{i+1}^0 = E_0\left(V_{i+1}\right) = E_0\left(E_0\left(V_{i+1}|V_i\right)\right) = E_0\left(V_i\right) = 1$$

dato che $E_0\left(V_{i+1}|V_i\right) = V_i E_0\left(V_1\right) = V_i$, per la proprietà di Markov forte. Con argomento analogo si prova

$$\gamma_{-1}^0 = q(1 + x_{-1}), x_{-1} = q\left(1 + x_{-1}\right)$$

da cui $x_{-1} = \frac{q}{p}$ e $\gamma_{-1}^0 = q\left(1 + \frac{q}{p}\right) = \frac{q}{p}$. Infine per ogni i intero positivo

$$\gamma_{-(i+1)}^0 = E_0\left(V_{-1}\right)\gamma_{-i}^0$$

da cui $\gamma_{-i}^0 = \left(\frac{q}{p}\right)^i$.

5. Dato che, qualunque sia la distribuzione π, è $\pi A = a$, è chiaro che $\pi\left(I - P\right) = 0$ se e solo se $\pi\left(I - P + A\right) = a$. Dato che se P è irriducibile la soluzione è unica, necessariamente la matrice $I - P + A$ è invertibile.

Section 1.8.

1. Sia H^1 l'hitting time di 1. Allora

$$p_{01}^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} P_0(H^1 = i)p_{11}^{(n-i)} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{5}\right)^{i-1}\frac{3}{5}p_{11}^{(n-i)}.$$

Ora la classe chiusa $\{1,2,3\}$ cui 1 appartiene corrisponde alla sottomatrice stocastica

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

che è irriducibile con l'unica distribuzione stazionaria $\pi_1 = \pi_2 = \frac{3}{8}, \pi_3 = \frac{1}{4}$. Inoltre, dato che il tempo di ritorno in 3 assume con probabilità positiva i valori 2 e 3, assume con probabilità positiva tutti i valori da 2 in poi, quindi 3 è aperiodico. Se ne deduce che $\lim_n p_{11}^{(n)} = \frac{3}{8}$ che permette di concludere che

$$\lim_n p_{01}^{(n)} = \frac{3}{8}\sum_{i=1}^{\infty} P_0(H^1 = i) = \frac{3}{8}\frac{3}{5}\frac{5}{4} = \frac{9}{32}.$$

Sia ora H^4 l'hitting time di 4. Allora $p_{04}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_0(H^4 = n - 3k)$. Supponiamo ora che $n = 3m$: allora

$$\begin{aligned} \lim_m p_{04}^{(3m)} &= \sum_{h=1}^{\infty} P_0(H^4 = 3h) = \sum_{h=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{3h} \\ &= \frac{1}{125}\frac{1}{1-\frac{1}{125}} = \frac{1}{124} \end{aligned}$$

mentre

$$\lim_m p_{04}^{(3m+1)} = \sum_{h=0}^{\infty} P_0(H^4 = 3h+1) = \frac{1}{5}\sum_{h=0}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^{3h} = \frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{125}} = \frac{25}{124}$$

che mostra ovviamente come $p_{04}^{(n)}$ non converga.

2. Si tratta di una matrice irriducibile per ogni $p \in [0,1]$, e lo stato 2 è aperiodico, quindi la distribuzione stazionaria π deve ottenersi anche come limite delle probabilità di transizione in n passi. Ora

$$\pi_1 = p\pi_3,\ \pi_2 = 3\pi_3$$

(possiamo ignorare l'ultima equazione perchè è linearmente dipendente dalle altre) che ha la soluzione unica

$$\pi_1 = \frac{p}{4+p}, \pi_2 = \frac{3}{4+p}, \pi_3 = \frac{1}{4+p}.$$

I valori di π_1 per $p = \frac{1}{16}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$ sono rispettivamente $\frac{1}{65}, \frac{1}{25}, \frac{1}{49}$ in accordo con i risultati dell'esercizio 1.1.7.

3. Sia $Y_n = X_n \bmod 13$. E' chiaro che Y_n è una catena di Markov irriducibile sullo spazio di stato $\{0,1,...,12\}$. La matrice di transizione ha tutti gli elementi non nulli uguali a $\frac{1}{6}$. Inoltre tutte le probabilità di transizione, in un numero sufficientemente grande di passi, sono positive. Infine la matrice è doppiamente stocastica, cioè tutte le somme di colonna sono uguali a 1. Concludiamo quindi che la distribuzione stazionaria è uniforme, e la quantità desiderata è $\lim_n p_{00}^{(n)} = \frac{1}{13}$.

4. Il grafo (irriducibile) corrispondente alla catena consta del ciclo $123 \to 312 \to 231 \to 123$ e del ciclo $213 \to 321 \to 132 \to 213$. Ogni vertice del primo ciclo ha un solo vertice del secondo ciclo con cui comunica, che si ottiene trasponendo i primi due elementi. Si evidenzia così l'esistenza di coppie "coniugate" di vertici nei due cicli, in cui gli archi entranti provengono dagli stessi vertici. Questo porta a definire le variabili $z_{ijk} = \frac{1-\alpha_i}{\alpha_i}\pi_{ijk}$, legate dalle equazioni

$$z_{123} = z_{321}, z_{312} = z_{213}, z_{231} = z_{132}.$$

Rimane un sistema di 3 equazioni in 3 incognite $z_{123}, z_{312}, z_{231}$.

$$\begin{cases} z_{231} + z_{312} = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2} z_{123} \\ z_{312} + z_{123} = \frac{1-\alpha_3}{\alpha_3} z_{231} \\ z_{123} + z_{231} = \frac{1-\alpha_1}{\alpha_1} z_{312} \end{cases}$$

Dalla prima

$$z_{312} = \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2} z_{123} - z_{231}$$

che inserita nella seconda dà

$$z_{123} + \frac{1-\alpha_2}{\alpha_2} z_{123} - z_{231} = \frac{1-\alpha_3}{\alpha_3} z_{231}$$

da cui $\frac{z_{123}}{\alpha_2} = \frac{z_{231}}{\alpha_3}$. Simmetricamente $\frac{z_{231}}{\alpha_3} = \frac{z_{312}}{\alpha_1}$. Abiamo quindi

$$z_{123} = z_{321} = c\alpha_2, z_{312} = z_{213} = c\alpha_1, z_{231} = z_{132} = c\alpha_3$$

da cui

$$\pi_{123} = \frac{\alpha_1\alpha_2}{1-\alpha_1} c, \pi_{231} = \frac{\alpha_2\alpha_3}{1-\alpha_2} c, \pi_{312} = \frac{\alpha_3\alpha_1}{1-\alpha_3}$$
$$\pi_{321} = \frac{\alpha_3\alpha_2}{1-\alpha_3} c, \pi_{132} = \frac{\alpha_1\alpha_3}{1-\alpha_1} c, \pi_{213} = \frac{\alpha_2\alpha_1}{1-\alpha_2}.$$

Si verifica infine facilmente che $c = 1$. Dato che tutti gli stati sono aperiodici questi valori rappresentano il limite di tutte le righe della matrice di transizione P^n, per $n \to \infty$.

5. Con riferimento all'interpretazione delle variabili Y_n come tempi di vita di lampadine che vengono immediatamente sostituite quando si rompono, la variabile X_n registra il tempo residuo di vita della lampadina che è in funzione al tempo n. All'istante di una sostituzione, questo tempo è uguale a 0. Questa catena è evidentemente irriducibile e, in virtù dell'ipotesi che $MCD\,\{n : P(Y_1 = n) > 0\}$ è uguale a 1, lo stato 0 è aperiodico. Dato che il tempo di ritorno in 0 ha evidentemente la legge di Y_1, la catena è ricorrente positiva e l'unica distribuzione invarainte dà a 0 la massa $\frac{1}{\mu}$. Quindi $\lim_n P(X_n = 0) = \frac{1}{\mu}$. Si conclude osservando che

$$\{X_n = 0\} = \{\exists k : n = Y_1 + ... + Y_k\}$$

Section 1.9

1. (a) Con due stati una catena irriducibile è sempre in bilancio dettagliato rispetto alla sua unica distribuzione invariante, che è $\left(\frac{q}{p+q}, \frac{p}{p+q}\right)$; (b) dato che l'unica distribuzione invariante è uniforme, la matrice è reversibile se e solo se è simmetrica, il che avviene solo quando $p = \frac{1}{2}$; (c) in questo caso il grafo è lineare, quindi le equazioni di bilancio dettagliato possono essere risolte ricorsivamente e la matrice è reversibile; (d) le equazioni di bilancio dettagliato danno una soluzione $\pi_i \ltimes \left(\frac{p}{q}\right)^i$, che può essere normalizzata ad una distribuzione di probabilità se e solo se $p < \frac{1}{2}$. D'altra parte se $p = \frac{1}{2}$ la catena è ricorrente nulla e se $p > \frac{1}{2}$ è transiente; (e) La condizione di bilancio dettagliato vale rispetto alla legge uniforme su S. Di conseguenza la matrice è reversibile se e solo se S è finito.

2. La catena di Markov (X_n) è evidentemente periodica. Più specificamente lo spazio di stato può essere partizionato nei due sottoinsiemi *Pari* e *Dispari*, a seconda che sia pari o dispari la distanza da B. Partendo da uno stato in *Pari* (*Dispari*) a tutti gli istanti pari si resta in *Pari* (*Dispari*) e a tutti gli istanti dispari si transita in *Dispari* (*Pari*). Di conseguenza la catena di Markov (X_n, Y_n) non è irriducibile ma è costituita da due classi chiuse

$$Pari \times Pari \bigcup Dispari \times Dispari, Dispari \times Pari \bigcup Pari \times Dispari$$

(a) Di conseguenza, dato che lo stato (A, B) appartiene alla seconda classe mentre la diagonale è tutta conteuta nella prima classe, la probabilità è 0; (b) Invece (A, E) appartiene alla prima classe. Dato che è facile vedere che ogni stato della classe comunica con (B, B) questa classe è irriducibile. Dato che lo spazio di stato è finito la catena è ricorrente e quindi la probabilità che $X_n = Y_n$ per qualche n è uguale a 1. La seconda questione si affronta notando che la distribuzione invariante della catena (X_n, Y_n) ristretta alla suddetta classe chiusa è necessariamente $\pi_{(i,j)} \ltimes v_i v_j$, il prodotto delle distribuzioni invarianti per (X_n) e (Y_n), che sono evidentemente uguali. Dato che (X_n) e (Y_n) sono passeggiate aleatorie sul grafo, la distribuzione invariante è la valenza normalizzata. Ma sappiamo ora che $\pi_{(i,j)} = \frac{1}{m_{(i,j)}}$, quindi

$$M_D = m_{(D,D)} \ltimes \frac{1}{v_D^2}, M_B = m_{(B,B)} \ltimes \frac{1}{v_B^2}$$

e dato che $v_D = 3$, mentre $v_B = 4$, si deduce che $9M_D = 16M_B$.

Section 1.10

1. Determiniamo la distribuzione invariante per la classe chiusa irriducibile $\{1, 2, 3\}$. Abbiamo $\pi_3 = \frac{2}{3}\pi_2$ e $\pi_2 = \pi_1$, quindi $\pi_1 = \pi_2 = \frac{3}{8}$, $\pi_3 = \frac{1}{4}$. La proporzione limite delle visite in 2, partendo da uno stato qualunque, è $\frac{3}{8}$ con probabilità 1.

2. Per risolvere l'esercizio non va distinta la casa dall'ufficio, ma bisogna prendere come catena di Markov X_n il numero di ombrelli a disposizione dopo n uscite. Quindi, dallo stato i con probabilità p (piove) si va nello stato $N-i+1$e con probabilità q (non piove) nello stato $N - i$, con $i = 1, ..., N$. Dallo stato 0 si va con probabilità 1 nello stato N. Ordinando gli stati nel modo seguente $0, N, 1, N-1, 2, N-2, ...$ s vede che si tratta

di una catena reversibile (è ovviamente irriducibile) con distribuzione invariante che soddisfa a $\pi_0 = q\pi_N$ e $\pi_i = \pi_{i+1}$ per $i = 1, ..., N-1$, da cui $\pi_0 = \frac{q}{N+q}$ e $\pi_i = \frac{1}{N+q}$ per $i = 1, ..., N$. Per bagnarsi bisogna non avere ombrelli a disposizione ed avere pioggia: la prima cosa si verifica con una proporzione asintotica $\frac{q}{N+q}$. Ogni volta che non ci sono ombrelli a disposizione piove con probabilità p, indipendentemente dal comportamento passato e futuro della catena: con un'ulteriore applicazione della legge forte dei grandi numeri (per variabili di Bernoulli indipendenti) la proporzione asintotica richiesta è quindi $\frac{pq}{N+q}$.

3. La ricorrenza positiva della catena (Y_m) è immediata perchè i tempi di ritorno negli stati di J sono ovviamente più corti se la catena non viene osservata quando non si trova in J. Per ogni $j \in J$, la massa $\widetilde{\pi}_j$ che la distribuzione stazionaria assegna a j è anche data dal limite (con probabilità 1) della proporzione delle visite a j quando la catena si trova in J, quindi $\lim_n \frac{V_j(n)}{V_J(n)}$, dove $V_J(n) = \sum_{k=1}^{n} 1_{\{X_k \in J\}}$. Per il teorema ergodico, con probabilità 1, $\frac{V_J(n)}{n}$ tende a $\pi_J = \sum_{j \in J} \pi_j$, mentre $\frac{V_j(n)}{n}$ tende a π_j. Se ne deduce che $\widetilde{\pi}_j = \frac{\pi_j}{\pi_J}$ per $j \in J$. Alternativamente, si osservi che le quantità γ_j^i per $i, j \in J$ non cambiano passando da (X_n) a (Y_m).

4. Lo stato della cantante può essere modellizzato con una catena di Markov con i due stati *Disturbato* (non canta) e *Tranquillo* (canta). Mentre la probabilità di transizione da T a D resta sempre $\frac{1}{2}$, la probabilità della transizione opposta è $\sqrt{x}$, dove x è la proporzione investita in fiori di £ 1000. Per la reversibilità la catena ha l'unica distribuzione invariante $\pi_D = \frac{1}{1+2\sqrt{x}}, \pi_T = \frac{2\sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$. Con questa politica l'impresario spende (asintoticamente, su un gran numero di concerti) £ $x \cdot 1000$ ogni volta che la cantante è nello stato D, quindi spende la somma di £ $\frac{1000 \cdot x}{1+2\sqrt{x}}$ per concerto, mentre ricava £ $\frac{1500 \cdot \sqrt{x}}{1+2\sqrt{x}}$ per concerto. Posto $y = \sqrt{x}$, l'impresario desidera quindi massimizzare la funzione $\frac{\frac{3}{2}y - y^2}{1+2y}$ (migliaia di sterline di guadagno), per $y \in [0, 1]$. Azzerando la derivato si ottiene l'equazione $-2y^2 - 2y + \frac{3}{2} = 0$, la cui radice all'interno dell'intervallo $[0, 1]$ è $y = \frac{1}{2}$, quindi $x = \frac{1}{4}$ è la soluzione certcata, corrispondente a £ 250 di fiori per giorno in cui la cantante è disturbata.

Section 2.1

1. Per prima cosa bisogna calcolare gli autovalori di Q

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

che sono $-5, -4, 0$ (quest'ultimo ovviamente comune a tutte le Q-matrici). Si pone quindi $p_{11}(t) = a + be^{-4t} + ce^{-5t}$, con le condizioni iniziali

$$\begin{aligned} p_{11}(0) &= a + b + c = 1, \frac{d}{dt} p_{11}(0) = -4b - 5c = -2 \\ \frac{d^2}{dt^2} p_{11}(0) &= 16b + 25c = 10 \end{aligned}$$

da cui $p_{11}(t) = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} e^{-5t}$.

2. (a) I è l'esponenziale della matrice con tutti gli elementi uguali a 0, che evidentemente è una Q-matrice. (b) La matrice ha per autovalori 1 e 0. Dato che l'ultimo non può essere scritto come $e^{t\lambda}$, con λ reale, questa matrice non è nel range della funzione esponenziale di matrice. (c) La matrice ha l'autovalore -1 (doppio) che anch'esso non può essere scritto come $e^{t\lambda}$, con λ reale, da cui la stessa conclusione di (b).

Section 2.3

1. Per il Teorema 2.3.3 $\min\{S,T\}$ è esponenziale di parametro $(\alpha+\beta)$. L'evento $\{S \le T\}$ coincide con l'evento $\{K=1\}$, dove $K=1$ quando $S<T$ e $K=2$ quando $T<S$ (a meno dell'insieme di probabilità nulla $\{S=T\}$), quindi $P(S\le T)=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$, ed essendo K e $\min\{S,T\}$ indipendenti, lo sono anche $\{S\le T\}$ e $\{\min(S,T)\ge t\}$, qualunque sia t.

2. Conviene utilizzare la trasformata di Laplace
$$\mathbf{E}\left(e^{-sT_1}\right)=\frac{\lambda}{\lambda+s}$$
da cui condizionando rispetto a N
$$\begin{aligned}\mathbf{E}\left(e^{-sT}\right) &= \mathbf{E}\left(\frac{\lambda}{\lambda+s}\right)^N=\beta\frac{\lambda}{\lambda+s}\sum_{n=1}^{\infty}\left[(1-\beta)\frac{\lambda}{\lambda+s}\right]^{n-1}\\ &= \beta\frac{\lambda}{\lambda+s}\frac{1}{1-(1-\beta)\frac{\lambda}{\lambda+s}}=\frac{\beta\lambda}{\beta\lambda+s}\end{aligned}$$

3. La trasformata di Laplace di $\lambda_1 S_1$ è proprio $\frac{1}{1+s}$, che prova la prima asserzione. Per la legge forte dei grandi numeri, quindi $\frac{1}{n}\sum_n \lambda_n S_n \to 1$ con probabilità 1, per cui, se $\lambda_n \equiv 1$ allora $\frac{1}{n}\sum_n S_n \to 1$, e quindi $\sum_n S_n \to \infty$ con probabilità 1, mentre se $\lambda_n \le c$ per ogni n, dato che
$$\frac{c}{n}\sum_n S_n \ge \frac{1}{n}\sum_n \lambda_n S_n \to 1$$
si ha ugualmente che $\sum_n S_n \to \infty$ con probabilità 1. Per il teorema 2.3.2 la limitatezza uniforme dei λ_n non è necessaria, ad esempio se $\lambda_n = n$ il risultato continua ad essere vero.

Section 2.4

1. La definizione cui ci si riferisce è che, qualunque sia n, $0<t_1<...<t_n$ e $i_1\le ...\le i_n \in \mathbf{N}$
$$P(X_{t_1}=i_1,...,X_{t_n}=i_n)=e^{-\lambda t_1}\frac{(\lambda t_1)}{i_1!}\prod_{j=1}^{n}e^{-\lambda(t_j-t_{j-1})}\frac{(\lambda(t_j-t_{j-1}))^{i_j-i_{j-1}}}{(i_j-i_{j-1})!}$$
Quindi
$$\begin{aligned}P(J_1 &> t)=P(X_t=0)=e^{-\lambda t},\\ P(t_1<J_1\le t_2<J_2) &= P(X_{t_1}=0,X_{t_2}=1)\\ &= e^{-\lambda t_1}\lambda(t_2-t_1)e^{-\lambda(t_2-t_1)}\end{aligned}$$

La conoscenza di queste probabilità per $0 < t_1 \leq t_2$ determina la legge di (J_1, J_2). In particolare la densità congiunta si ottiene derivando prima rispetto a t_1 poi rispetto a t_2. Siano infatti, per $0 \leq t_1 < t_2$

$$\begin{aligned} A_{t_1,t_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^{+2} : t_1 < x < t_2 < y\right\}, \\ B_{t_1,t_2} &= \left\{(x,y) \in \mathbf{R}^{+2} : x < t_1, y < t_2\right\}. \end{aligned}$$

Si osservi che, a meno di insiemi di misura di Lebesgue nulla

$$B_{t_1,t_2} \cup A_{0,t_2} = A_{0,t_1} \cup A_{t_1,t_2}$$

e le due unioni sono disgiunte, da cui la funzione di ripartizione congiunta di (J_1, J_2) è data da

$$\begin{aligned} P(B_{t_1,t_2}) &= P(A_{0,t_1}) + P(A_{t_1,t_2}) - P(A_{0,t_2}) \\ &= \lambda t_1 e^{-\lambda t_1} + \lambda (t_2 - t_1) e^{-\lambda t_2} - \lambda t_2 e^{-\lambda t_2} \\ & \quad \lambda t_1 \left(e^{-\lambda t_1} - e^{-\lambda t_2}\right) \end{aligned}$$

che è ovviamente due volte differenziabile una volta rispetto a t_1 e l'altra rispetto a t_2, con derivata

$$\lambda^2 e^{-\lambda t_2} = \lambda e^{-\lambda t_1} e^{-\lambda(t_2 - t_1)}$$

da cui J_1 e $J_2 - J_1$ sono identicamente distribuite con la stessa densità esponenziale di parametro λ.

2. Se il processo $(X_t)_{t \geq 0}$ è a incrementi indipendenti, con $X_0 = 0$ e, per $k = 1, ..., n$

$$P(X_{\frac{k}{n}t} - X_{\frac{(k-1)}{n}t} = 0) = 1 - \frac{\lambda t}{n} + o_k\left(\frac{1}{n}\right),$$

dove $\sup_{k=1,...,n} n o_k\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ per $n \to \infty$, allora

$$\begin{aligned} P(J_1 &> t) = P(X_t = 0) = P(X_{\frac{k}{n}t} = 0, k = 1, ..., n) \\ &= P(X_{\frac{k}{n}t} - X_{\frac{(k-1)}{n}} = 0, k = 1, ..., n) = \prod_{k=1}^{n}\left(1 - \lambda\frac{t}{n} + o_k\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to e^{-\lambda t}, \end{aligned}$$

prendendo il logaritmo e utilizzando lo sviluppo $\log(1-x) = x + o(x)$.

3. Per il Teorema 2.4.4 il processo degli arrivi dei numeri 1 e 7 è un processo di Poisson con velocità di 8 bus all'ora. Quindi la probabilità a) è $e^{-8}\frac{8^3}{3!}$. Per la mancanza di memoria dei tempi di attesa dei due autobus e il Teorema 2.3.3 la probabilità b) è $\left(\frac{7}{8}\right)^3 \frac{1}{8}$, mentre per la c) basta osservare che ciascun arrivo viene cancellato con probabilità $\frac{1}{2}$, indpendentemente dal processo degli arrivi e dalle "cancellazioni" precedenti, quindi (caratterizzazione infinitesimale) il processo degli arrivi effettivi diventa un Poisson di parametro 4 (autobus per ora), quindi la probabilità che in mezz'ora non ne passi nessuno è e^{-2}.

4. Come per il punto precedente c), la legge è Poisson di media λp.

5. Se $S_i, i = 1, 2, ...$ sono i tempi (esponenziali di parametro λ) di attesa tra una macchina e l'altra, il tempo che il pedone deve attendere per attraversare sarà

$$T = a + J_N, \text{ dove } N = \sup \{k : S_i < a, i = 1, ..., k\}$$

che riscriviamo come

$$T = a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{n} S_j \right) 1_{\{S_{n+1} > a\}} \prod_{j=1}^{n} 1_{\{S_j < a\}}$$

per cui

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(T) &= a + \mathbf{E}\left(S_1 1_{\{S_1 < a\}}\right) \sum_{n=1}^{\infty} nP\left(S_1 < a\right)^{n-1} P\left(S_1 > a\right) \\ &= a + \frac{\mathbf{E}\left(S_1 1_{\{S_1 < a\}}\right)}{P\left(S_1 > a\right)} = e^{\lambda a} - 1, \end{aligned}$$

dato che

$$\mathbf{E}\left(S_1 1_{\{S_1 < a\}}\right) = \int_0^a \lambda s e^{-\lambda s} ds = -\left[s e^{-\lambda s}\right]_0^a + \int_0^a e^{-\lambda s} ds = 1 - e^{-\lambda a}\left(1 + a\right).$$

a) Stavolta la velocità del processo di Poisson si raddoppia (sovrepposizione dei due processi di Poisson per ciascun senso di marcia e il tempo di attraversamento si raddoppia anch'esso, quindi il tempo medio di attesa diventa $e^{4\lambda a} - 1$. b) In questo caso, per linearità, il tempo medio di attesa è $2\left(e^{\lambda a} - 1\right)$.

Section 2.5

1. Come già nell'Esempio 2.5.1

$$\begin{aligned} \phi(t) &= E(z^{X_t}) = E(z^{X_t} 1_{T \le t}) + E(z^{X_t} 1_{T > t}) = \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} E(z^{X_t} | T &= s) ds + z e^{-\lambda t} = \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda s} E(z^{X_{t-s}} | X_0 &= 2) ds + z e^{-\lambda t} = \\ &\int_0^t \lambda e^{-\lambda s} \phi(t-s)^2 ds + z e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

dato che, condizionalmente a $X_0 = 2$, il processo $\{X_t, t \ge 0\}$ è somma di due processi indipendenti distribuiti come lo stesso processo, condizionato a $X_0 = 1$. Derivando rispetto a t ambo i membri si ottiene l'equazione differenziale

$$\phi'(t) = \lambda \phi(t) \left(1 - \phi(t)\right), \phi(0) = z$$

Per separazione delle variabili

$$\frac{d\phi}{\phi\left(1 - \phi\right)} = \lambda dt$$

e quindi, tenendo conto della condizione iniziale

$$\log \phi(t) - \log(1-\phi(t)) - \log z - \log(1-z) = \lambda t$$

e quindi

$$\phi(t) = \frac{ze^{-\lambda t}}{1 - z(1-e^{-\lambda t})} = (1-q)\sum_{n=1}^{\infty} z^n q^{n-1}$$

essendo $q = e^{-\lambda t}$, da cui

$$P(X_t = n) = q^{n-1}(1-q), n = 1, 2, ...$$

Section 2.7

1. Osserviamo innanzi tutto che la catena di salto è una passeggiata aleatoria sugli interi con probabilità di transizione λ (a destra) e μ (a sinistra). (a) Senza perdita di generalità, assumiamo che i sia positivo. La probabilità richiesta è quella che la catena di salto, partendo da zero, tocchi i, quindi è 1 per $\lambda \geq \frac{1}{2}$ e $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$ per $\lambda < \frac{1}{2}$ (rovina del giocatore). Consideriamo a parte il caso $i = 0$: la probabilità di ritorno in 0 è 1 per $\lambda = \frac{1}{2}$, mentre per $\lambda > \frac{1}{2}$, applicando la legge delle alternative in base alla posizione al primo passo, è
$$\mu + \lambda P_1(H^0 < \infty) = \mu + \lambda\frac{\mu}{\lambda} = 2\mu.$$
Analogamente, per $\lambda < \frac{1}{2}$, la probabilità di ritorno in 0 è 2λ; (b) Se V_i è il numero delle visite in i, il tempo di permanenza in i è uguale a $\sum_{k=1}^{V_i} S_k$, dove S_k sono i successivi tempi di permanenza in i. Dato che questi sono i.i.d. e indipendenti da V_i, il tempo medio di permanenza in i è pari a $\frac{E_0(V_i)}{q_i}$. Di nuovo, senza perdita di generalità assumiamo $i > 0$. Se $\lambda = \frac{1}{2}$ la catena di salto è ricorrente, quindi $V_i = \infty$, e il tempo medio totale trascorso in i è infinito. Se $\lambda > \frac{1}{2}$ si ha per $r = 0, 1, ...$
$$P_0(V_i > r) = P_i(V_i \geq r) = \left(\mu + \lambda\frac{\mu}{\lambda}\right)^r = (2\mu)^r$$
da cui $E_0(V_i) = \frac{1}{(1-2\mu)}$. Se $\lambda < \frac{1}{2}$ si ha per $r = 0, 1, ...$
$$P_0(V_i > r) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i P_i(V_i \geq r) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i (2\lambda)^r$$
da cui $E_0(V_i) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i \frac{1}{(1-2\lambda)}$. Quando $i = 0$, allora per $r = 0, 1, ...$ con analogo ragionamento $E_0(V_i) = \frac{1}{(1-2\min(\lambda,\mu))}$

   (c) Quando $\mu = 0$ abbiamo un processo di nascita, quindi una condizione necessaria e sufficiente per l'esplosione è che $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} < \infty$. Quando $0 < \mu < \frac{1}{2}$, la stessa condizione rimane necessaria. Stabiliamo infatti per prima cosa che la catena di salto (Y_n) tende a $+\infty$. Per la transienza, la catena tocca ciascuno stato un numero finito di volte, quindi esce definitivamente da ciascun sottoinsieme limitato di stati; inoltre ciascuno stato positivo è toccato con probabilità 1 (rovina del giocatore). Quindi

$$\begin{aligned} P_0\left(Y_n \to +\infty\right) &= P_0\left(\cup_{i\in\mathbf{N}}\left\{V_{-i}=0\right\}\right) = \lim_{i\to\infty} P\left(V_{-i}=0\right) \\ &= 1-\lim_{i\to\infty} P(V_{-i}>0) = 1-\lim_{i\to\infty}\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^i = 1. \end{aligned}$$

A questo punto possiamo costruire sullo stesso spazio di probabilità sia il processo di nascita e morte che stiamo trattando sia il processo di sola nascita avente i rate di nascita q_i. Basta utilizzare gli stessi tempi esponenziali del processo di nascita per il processo di nascita e morte la prima volta che si entra in ciascuno stato. Si vede facilmente che il tempo di esplosione per il processo di nascita e morte, è sempre maggiore o uguale di quello del processo di sola nascita, quindi se il primo esplode esplode anche il secondo, per cui $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{q_i}<\infty$. Per provare il viceversa occorre, per un qualche $\theta>0$, Basta produrre una soluzione $z=\{z_i, i\in\mathbb{Z}\}$, non banale e limitata da 1, del sistema (infinito) di equazioni $Qz=z$, che sono

$$\theta z_i = \lambda q_i z_{i+1} - q_i z_i + \mu q_i z_{i-1}, i\in\mathbb{Z}.$$

Per far questo consideriamo separatamente le equazioni per $i=1,2,\dots$ e quelle per $i=0,-1,\dots$. Per le prime, poniamo $y_i = z_{i+1}-z_i$, per $i=0,1,\dots$ da cui

$$\lambda q_i y_i = \theta z_i + \mu q_i y_{i-1},$$

che risolte iterativamente permettono di scrivere le relazioni

$$y_k = \frac{\theta}{\lambda}\sum_{i=1}^{k}(\frac{\mu}{\lambda})^{k-i}\frac{z_i}{q_i} + (\frac{\mu}{\lambda})^k y_0, k=1,2,\dots$$

Per le seconde, posto $w_k = z_{-(k+1)} - z_{-k}$, per $k=0,1,\dots$, otteniamo allo stesso modo

$$w_k = \frac{\theta}{\mu}\sum_{i=0}^{k}(\frac{\lambda}{\mu})^{k-i}\frac{z_{-i}}{q_{-i}} - (\frac{\mu}{\lambda})^{k+1} y_0, k=0,1,2,\dots.$$

Vediamo quindi che, pur di scegliere $z_0<0<z_1$ e $y_0>0$ otteniamo, risolvendo queste equazioni, una successione $z=\{z_i, i\in\mathbb{Z}\}$, che è crescente in i. Basta infine mostrare che questa successione è limitata superiormente per terminare la prova, utilizzando il Teorema 2.7.2. Siamo quindi interessati solo a z_i con i positivo. Supponiamo ora, per assurdo, che la successione z tenda all'infinito al crescere dell'indice: per m sufficientemente grande avremo $y_0 < \frac{\theta z_i}{\lambda q_0}$ per $i=m,m+1,\dots$. Utilizzando la monotonia della successione otterremo quindi

$$y_k \le z_k \frac{\theta}{\lambda}\sum_{i=0}^{k}(\frac{\mu}{\lambda})^{k-i}\frac{1}{q_i}$$

per $k=m,m+1,\dots$, da cui utilizzando la maggiorazione $1+x<e^x$, per $x>0$

$$z_{k+1} \le z_k(1+\frac{\theta}{\lambda}\sum_{i=0}^{k}(\frac{\mu}{\lambda})^{k-i}\frac{1}{q_i}) \le z_k \exp\{\frac{\theta}{\lambda}\sum_{i=0}^{k}(\frac{\mu}{\lambda})^{k-i}\frac{1}{q_i}\}$$

e infine

$$z_k \le z_m \exp\{\frac{\theta}{\lambda}\sum_{j=m}^{k}\sum_{i=0}^{j}(\frac{\mu}{\lambda})^{j-i}\frac{1}{q_i}\}.$$

Per concludere basta ora manipolare in modo semplice l'esponente nella precedente formula. La quantità al membro di destra si maggiora con

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}(\frac{\mu}{\lambda})^{j-i}\frac{1}{q_i} = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{q_i}\sum_{h=0}^{\infty}(\frac{\mu}{\lambda})^h < \infty$$

(dato che abbiamo assunto $\mu < \lambda$) in contraddizione con l'ipotesi.

Section 2.8

1. Il processo $(X_t, t \ge 0)$ che registra la posizione delle due mosche è un processo di Markov con Q-matrice

$$\begin{pmatrix} -(\lambda+\mu) & \lambda & \mu \\ \mu & -(\lambda+\mu) & \lambda \\ \lambda & \mu & -(\lambda+\mu) \end{pmatrix}$$

Questa matrice ha gli autovalori 0 (come tutte le Q-matrici) e $\gamma \pm i\varphi$, con $\lambda = -\frac{3}{2}(\lambda+\mu)$ e $\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}|\lambda-\mu|$. Supponiamo $\lambda \ne \mu$. Dobbiamo determinare i coefficienti a, b, c tali che

$$p_{AA}(t) = a + be^{\gamma t}\cos\varphi t + ce^{\gamma t}\cos\varphi t$$

con le condizioni iniziali

$$p_{AA}(0) = 1, \frac{d}{dt}p_{AA}(0) = -(\lambda+\mu), \frac{d^2}{dt^2}p_{AA}(0) = (\lambda+\mu)^2 + 2\lambda\mu$$

che risolte danno $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}, c = 0$. Se $\lambda = \mu$ possiamo ridurci a due soli stati A e $\neg A$, con la Q-matrice

$$\begin{pmatrix} -2\lambda & 2\lambda \\ \lambda & -\lambda \end{pmatrix}$$

che ha gli autovalori 0 e -3λ. Dobbiamo quindi determinare i coefficienti a e b tali che

$$p_{AA}(t) = a + be^{-3\lambda t}, p_{AA}(0) = 1, \frac{d}{dt}p_{AA}(0) = -2\lambda$$

da cui $a = \frac{1}{3}, b = \frac{2}{3}$. L'espressione precedente continua a valere.

2. Il primo tempo di salto S_1 è esponenziale con parametro $\lambda+\mu$. Condizionalmente a $S_1 = s$, il processo $(X_{s+h}, h \ge 0)$, è con probabilità $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ identicamente nullo e con probabilità $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ è la somma di due processi indipendenti distribuiti come $(X_t, t \ge 0)$, da cui, dato che se $X_t = 0$ necessariamente $S_1 \le s$

$$\begin{aligned} h(t) &= E_1(1_{X_t=0}) = \int_0^t (\lambda+\mu)\, e^{-(\lambda+\mu)s} E_1(1_{X_t=0}|S_1 = s)ds \\ &= \int_0^t e^{-(\lambda+\mu)s}\left[\mu + \lambda h^2(t-s)\right] ds \end{aligned}$$

dato che

$$E_1(1_{X_t}=0|S_1=s)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}P_1(X_{t-s}=0)^2.$$

E' chiaro che, differenziando ambo i membri dell'equazione pecedente rispetto a t si ottiene l'equazione differenziale

$$h'(t)=-\left(\lambda+\mu\right)h(t)+\lambda h(t)^2+\mu, h(0)=0.$$

che si risolve per separazione delle variabili

$$\frac{dh}{\lambda h^2-\left(\lambda+\mu\right)h+\mu}=dt$$

e dato che

$$\frac{1}{\lambda h^2-\left(\lambda+\mu\right)h+\mu}=\frac{1}{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{\frac{\mu}{\lambda}-h}-\frac{1}{1-h}\right)$$

si ha

$$\log\left(\frac{\mu}{\lambda}-h(t)\right)+\log\left(1-h(t)\right)+\log\frac{\mu}{\lambda}=t\left(\lambda-\mu\right)$$

che risolta dà precisamente

$$h(t)=\frac{\mu e^{t\mu}-\mu e^{t\lambda}}{\mu e^{t\mu}-\lambda e^{t\lambda}}.$$

Section 3.3

1. Per determinare le probabilità h_1 e h_2 di toccare 3 partendo da 1 e 2 (partendo da 4 la probabilità è 0) occorre risolvere il sistema

$$-h_1+\frac{1}{2}h_2=-\frac{1}{2},\frac{1}{4}h_1-\frac{1}{2}h_2=0$$

che dà immediatamente $h_1=\frac{2}{3},h_2=\frac{1}{3}$. I tempi attesi k_1, k_2 e k_3 per l'assorbimento in 4 partendo rispettivamente da 1, 2 e 3 soddisfano

$$\begin{aligned}k_1&=\frac{1}{2}k_2+\frac{1}{2}k_3+1\\ \frac{1}{2}k_2&=1+\frac{1}{4}k_1\\ \frac{1}{3}k_3&=1+\frac{1}{6}k_1\end{aligned}$$

che risolto dà $k_1=7$, $k_2=\frac{11}{2}$ e $k_3=\frac{13}{2}$.

Section 3..4

1. L'esercizio può essere risolto facendo unicamente riferimento alla catena di salto e sfruttando il fatto che

$$\theta=P_{A_k}\left(X\text{ tocca }A_{k-1}\right),\ x=P_{B_k}\left(X\text{ tocca }A_k\right)$$

non dipendono da $k = 1, 2, ...$ Per la proprietà di Markov forte, quindi $P_{A_k}(X \text{ tocca } A_0) = \theta^k$, per qualunque k intero positivo. Per determinare θ e x si utilizza la familiare decomposizione basata sul primo salto e la proprietà sopra indicata, ottenendo il sistema

$$\begin{aligned}
\theta &= \frac{\mu}{\lambda+\alpha+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\alpha+\mu}\theta^2 + \frac{\alpha}{\lambda+\alpha+\mu}x\theta \\
x &= \frac{\beta}{\lambda+\beta} + \frac{\lambda}{\lambda+\beta}x\theta \Longrightarrow x = \frac{\beta}{\lambda+\beta-\lambda\theta}
\end{aligned}$$

che sostituita nell'equazione superiore dà infine $(\theta - 1) f(\theta) = 0$ come richiesto. Evidentemente θ è la più piccola soluzione non-negativa. Quindi, visto che $f(0) > 0$, se invece $f(1) = \mu\beta - \lambda(\alpha + \beta) < 0$, tale soluzione è inferiore ad 1, quindi la catena è transiente.

Section 3.6

1. Dato che la catena è irriducibile, l'unica distribuzione invariante si ottiene risolvendo il sistema

$$\begin{aligned}
-2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\
\lambda_1 - 4\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\
\lambda_1 - 3\lambda_3 &= 0
\end{aligned}$$

che dà $\lambda_1 = \frac{3}{5}$, $\lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{5}$. Quindi $p_{11}(t) \to \frac{3}{5}$, in accordo con il calcolo diretto fatto nell'Esercizio 2.1.1.

2. Nel caso (a) la catena è irriducibile e l'unca distribuzione invariante è

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{6}, \lambda_3 = \lambda_4 = \frac{1}{3}$$

quindi la probabilità richiesta è $\frac{1}{6}$. Nel caso (b) la catena ha l'unico stato assorbente 4, con cui comunicano tutti gli altri, ne consegue che l'assorbimento è sicuro, quindi la probabilità richiesta è 0. Nel caso (c) la catena si decompone in due classi chiuse irriducibili: per risolvere l'esercizio basta far riferimento alla prima, che contiene precisamente gli stati 1 e 2. Si tratta di una catena doppiamente stocastica, quindi l'unica distribuzione stazionaria è uniforme sui due stati, e il limite cercato vale $\frac{1}{2}$. Nel caso (d), invece, la catena ha due classi chiuse irriducibili, costituite rispettivamente da $\{2, 3\}$ e dallo stato assorbente 4. Nel primo istante di salto partendo dallo stato transitorio 1, con probabilità $\frac{1}{2}$ si accede alla prima, e con probabilità $\frac{1}{2}$ si viene assorbiti in 4. Dato che l'unica distribuzione stazionaria per la restrizione della catena a $\{2, 3\}$ è $\lambda_2 = \frac{1}{3}$, $\lambda_3 = \frac{2}{3}$, la probabilità richiesta è $\frac{1}{2}\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

3. Quando la coda non è vuota occorre distinguere se il servente è al primo o al secondo stadio del servizio. Disegnando il grafo corrispondente si ha l'idea della seguente numerazione degli stati: lo stato 0, naturalmente, rappresenta l'assenza di clienti in coda, mentre per ogni k intero positivo, lo stato $2k$ rappresenta k clienti in coda, incluso quello che è servito che si trova nel primo stadio del servizio, mentre lo stato $2k - 1$

rappresenta k clienti in coda, incluso quello che è servito che si trova nel secondo stadio del servizio. In questo modo sia ha che $q_{i,i-1} = \mu$ per ogni i intero positivo, mentre $q_{i,i+2} = \lambda$, per ogni i intero non negativo. Le equazioni che caratterizzano una misura stazionaria x_i, $i = 0, 1, ...$ sono quindi

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= (1+r)\,x_k - r x_{k-2}, k = 2, 3, ... \\ x_2 &= (1+r)\,x_1, x_1 = r x_0, \end{aligned}$$

con $r = \frac{\lambda}{\mu}$. E' chiaro che la catena è irriducibile e non è esplosiva perchè, tranne che nello stato 0, il tempo di permanenza in ciascuno stato è esponenziale con parametro $(\lambda + \mu)$. Al fine di determinare se (x_i) è sommabile calcoliamo la sua funzione generatrice $G(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k x_k$, che è sicuramente ben definita per s sufficientemente piccolo, dato che (x_i) può essere maggiorata da una successione geometrica. L'equazione alle differenze fornisce

$$G(s) - x_0 - x_1 s - x_2 s^2 + s^3 r G(s) = s(1+r)\,[G(s) - x_0 - x_1 s]$$

da cui

$$\begin{aligned} G(s) &= x_0 \frac{1 - s(1+r) + sr - s^2 r\,(1+r) + s^2 r\,(1+r)}{1 + s^3 r - s(1+r)} \\ &= x_0 \frac{1-s}{1 + s^3 r - s(1+r)} = x_0 \frac{1}{1 - rs - rs^2}, \end{aligned}$$

e dato che $G(s)$ è analitica dentro l'intervallo di convergenza, si mantiene finita fino a che il polinomio al denominatore è positivo. Si conclude che $G(1) < +\infty$ se e solo se $1 - 2r > 0$, cioè $r = \frac{\lambda}{\mu} < \frac{1}{2}$. In questo caso scegliendo $x_0 = 1 - 2r$ si normalizza la misura invariante. Più in dettaglio

$$G(s) = \frac{2\,(1-2r)}{\sqrt{r(4+r)}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{r}} - 1 - 2s} + \frac{1}{\sqrt{1+\frac{4}{r}} + 1 + 2s} \right\}$$

ed eguagliando a x_i il coefficiente di s^i si ottiene per $k = 0, 1, ...$

$$\begin{aligned} x_{2k} &= \frac{(1-2r)\,2^{2k+1}}{\sqrt{r(4+r)}} \left\{ \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{r}} - 1\right)^{2k+1}} + \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{r}} + 1\right)^{2k+1}} \right\} \\ x_{2k+1} &= \frac{(1-2r)\,2^{2k+2}}{\sqrt{r(4+r)}} \left\{ \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{r}} - 1\right)^{2k+2}} - \frac{1}{\left(\sqrt{1+\frac{4}{r}} + 1\right)^{2k+2}} \right\} \end{aligned}$$

Section 3.7

1. Il numero di autobus in servizio è una catena di Markov sullo spazio di stato $\{0, ..., N\}$ con intensità $q_{i,i+1} = \lambda$, $q_{i+1,i} = \mu$ per $i = 0, 1, ..., N-1$. E' chiaro che Q è in bilancio

dettagliato rispetto alla misura $x_i = c\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i$. Imponendo la normalizzazione si ottiene la distribuzione di equilibrio

$$\lambda_i = \frac{\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^i}{1-\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{N+1}}, i = 0, ...N.$$

2. Il processo $(X_t, t \geq 0)$ che conta il numero di linee occupate ha le intensità non nulle

$$q_{i,i+1} = \lambda, q_{i,i-1} = i\mu 1_{\{i>0\}}, i = 0, 1, ...$$

Per prima cosa osserviamo che il processo è non esplosivo, dato che la catena di salto, che ha le probabilità di transizione non nulle $\pi_{0,1} = 1$ e

$$\pi_{i,i+1} = \frac{\lambda}{\lambda + i\mu}, \pi_{i,i-1} = \frac{i\mu}{\lambda + i\mu}, i = 1, 2, ...$$

è irriducibile ed è in bilancio dettagliato rispetto alla misura

$$\begin{aligned}\nu_n &= \nu_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \frac{\lambda + (i+1)\mu}{(i+1)\mu} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \prod_{i=0}^{n-1} \left(1 + \frac{\mu}{\lambda + i\mu}\right) \\ &= \nu_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \frac{\lambda + n\mu}{\lambda}\end{aligned}$$

che posto $\sum_n \nu_n = 1$, ha l'unica soluzione

$$\nu_0^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{n!} \left(1 + \frac{n\mu}{\lambda}\right) = 2e^{\frac{\lambda}{\mu}}$$

$$\nu_n = e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \frac{1}{2n!} \left(1 + \frac{n\mu}{\lambda}\right)$$

La catena di salto è quindi ricorrente (positiva). Si verifica ora con lo stesso argomento, sostituendo $\pi_{i,j}$ con $q_{i,j}$, che Q è in bilancio dettagliato rispetto alla distribuzione di Poisson di media $\frac{\lambda}{\mu}$, che è quindi l'unica distribuzione invariante nonchè di equilibrio. La lunghezza media di un periodo in cui almeno un linea è occupata differisce dal tempo medio m_0 di ritorno in 0 per il tempo medio di attesa del primo cliente, che è uguale a $\frac{1}{\lambda}$. E' quindi uguale a

$$m_0 - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda e^{-\frac{\lambda}{\mu}}} - \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(e^{\frac{\lambda}{\mu}} - 1\right).$$

Consideriamo l'equazione in avanti

$$\begin{aligned}p'_{m,n}(t) &= -(\lambda + n\mu)\, p_{m,n}(t) + \lambda p_{m,n-1}(t)(1 - \delta_{n,0}) + (n+1)\,\mu p_{m,n+1}(t), \\ p_{m,n}(0) &= \delta_{m,n}.\end{aligned}$$

Definiamo ora $G_m(s,t) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_{m,k}(t)$, moltiplichiamo per s^n ambo i membri dell'equazione e sommiamo. Si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial G_m}{\partial t} &= -\lambda G_m - \mu s \frac{\partial G_m}{\partial s} + \lambda s G_m + \mu \frac{\partial G_m}{\partial s} \\ G_m(s,0) &= s^m \end{aligned}$$

che si risolve con il metodo delle caratteristiche, che sono descritte da

$$\frac{dG}{\lambda G\,(1-s)} = \frac{ds}{\mu\,(1-s)} = dt$$

che possono essere parametrizzate da t come

$$s(t) = 1 + (s(0)-1)e^{\mu t}, G(t) = G(0)\exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}\,(s(0)-1)\left(e^{\mu t}-1\right)\right\}$$

Invertendo questo mapping, posto $s(t) = s, G(t) = G$, otteniamo

$$s(0) = 1 + e^{-\mu t}\,(s-1)\,, G(0) = G\exp\left\{-\frac{\lambda}{\mu}\,(s-1)\left(1-e^{-\mu t}\right)\right\}$$

e dato che il dato iniziale è $G(0) = s(0)^m$ otteniamo

$$G_m\,(s,t) = \left[1 + e^{-\mu t}\,(s-1)\right]^m \exp\left\{\frac{\lambda}{\mu}\,(s-1)\left(1-e^{-\mu t}\right)\right\}.$$

Derivando rispetto a s in $s = 1$ si ottiene

$$E_m\,(X_t) = me^{-\mu t} + \frac{\lambda}{\mu}\left(1-e^{-\mu t}\right).$$

Dato che il processo $\{X_t, t \geq 0\}$ è reversibile, quando X_0 è Poisson con media $\frac{\lambda}{\mu}$, per ogni $T > 0$ il processo $\left\{\widehat{X}_t^T = X_{T-t}, 0 \leq t \leq T\right\}$ è identico in legge a $\{X_t, 0 \leq t \leq T\}$. Siano ora $A_t = \sum_{0<s<t}(\Delta X)_s^+$ e $N_t = \sum_{0<s<t}(\Delta X)_s^-$, dove

$$(\Delta X)_s^+ = \max\left\{X_{s+} - X_{s-}, 0\right\}, (\Delta X)_s^- = \max\left\{X_{s-} - X_{s+}, 0\right\},$$

i processi degli arrivi e delle chiamate completate nell'intervallo $(0,t)$. Ora

$$\widehat{A}_t^t = \sum_{0<s<t}\left(\Delta \widehat{X}^t\right)_s^+ = \sum_{0<s<t}(\Delta X)_s^- = N_t.$$

Ma per la reversibilità $\widehat{A}_t^t$ ha la stessa legge di A_t: quindi N_t ha legge di Poisson di media λt. Per mostrare che $\{N_t, t \geq 0\}$ è un processo di Poisson occorre in più mostrare che ha incrementi indipendenti e stazionari: ma questa proprietà è posseduta dal processo $\left\{\widehat{A}_t^T, 0 \leq t \leq T\right\}$, che è identico in legge a $\{A_t, 0 \leq t \leq T\}$.