Processi Stocastici 2012-13 e 2013-2014
Esame scritto

1. Nell atrio del nostro istituto, come sapete, ci sono tre macchine che distribuiscono bevande fredde e/o cibarie di vario tipo. Supponiamo che ciascuna di queste macchine si rompa durante una giornata con probabilita $\frac{1}{2}$, indipendentemente da quanto succede alle altre e dalle sue rotture passate. Alla chiusura notturna dellistituto le macchine rotte vengono portate ad un centro per le riparazioni che pu ripararne al piu una al giorno, riportandola al suo posto alla fine della giornata successiva. Sia X_n il numero delle macchine che funzionano alla fine del giorno n, escludendo quelle che si sono rotte durante detto giorno ed includendo quella eventualmente ritornata dalla riparazione.

   (a) Determinare la matrice di transizione di $(X_n, n = 0, 1, \ldots)$.. RISPOSTA: La legge di X_1 dato $X_0 = 3$ binomiale $(3, \frac{1}{2})$. La legge di X_1 dato $X_0 = i$, con $i = 1, 2$, si ottiene traslando di 1 la legge binomiale $(i, \frac{1}{2})$. Infine se $X_0 = 0$ allora $X_1 = 1$ con probabilit 1.

   (b) Classificare gli stati e determinare la distribuzione invariante. RISPOSTA: Dato che il grafo connesso, la catena irriducibile, ricorrente positiva con distribuzione invariante π che si ottiene dal sistema lineare

   $$8\pi(0) = \pi(3), 8\pi(1) = 8\pi(0) + 4\pi(1) + 2\pi(2) + 3\pi(3),$$

   $$8\pi(2) = 4\pi(1) + 4\pi(2) + 3\pi(3), 2\pi(3) = \pi(2) + 2\pi(3),$$

   da cui

   $$59\pi(0) = 1, 59\pi(1) = 22, 59\pi(2) = 28, 59\pi(3) = 8;$$

   (c) Determinare il numero medio di macchine che funzionano allinizio di un giorno tipico. RISPOSTA: La catena essendo anche aperiodica, la distribuzione stazionaria anche di equilibrio, quindi basta calcolarne la media $\frac{22+28\times2+8\times3}{59} = \frac{102}{59}$.

2. Un corso di laurea magistrale prevede un esame di ammissione dal primo al secondo anno e un esame finale alla fine del secondo anno. La probabilita che uno studente del primo anno passi lesame di ammissione al secondo anno e $\frac{3}{4}$. Uno studente del secondo anno passa invece lesame finale con probabilita $\frac{1}{2}$. In caso di fallimento in uno degli esami, gli studenti respinti lasciano il corso con probabilita $\frac{1}{2}$, oppure si iscrivono di nuovo allultimo anno frequentato con probabilita $\frac{1}{2}$, con le stesse probabilit di passare gli esami.

   (a) Scrivere la matrice di transizione di $(X_n, n = 0, 1, \ldots)$. RISPOSTA: Ci sono 4 stati, che chiamiamo 0 (rinuncia al corso di laurea), 1 (inizio primo anno), 2 (inizio secondo anno) e 3 (laurea). Il primo e l'ultimo sono evidentemente assorbenti, mentre

   $$P(1,2) = \frac{3}{4}, P(1,1) = P(1,0) = \frac{1}{8}, P(2,3) = \frac{1}{2}, P(2,2) = P(2,0) = \frac{1}{4};$$

(b) Calcolare la probabilita che uno studente del primo anno passi con successo lesame finale. RISPOSTA: Si ottiene determinando h_1 dal sistema

$$8h_1 = h_1 + 6h_2, 4h_2 = h_2 + 2$$

da cui $h_2 = \frac{2}{3}$ e $h_1 = \frac{4}{7}$;

(c) Calcolare il numero medio di anni che un tale studente trascorre nel corso di laurea. RISPOSTA: Possiamo riunire i due stati assorbenti in uno solo e determinare k_1 risolvendo il sistema

$$8k_1 = 8 + k_1 + 6k_2, 4k_2 = 4 + k_2,$$

da cui $k_2 = \frac{4}{3}$ e $k_3 = \frac{16}{7}$.

3. Si consideri un gruppo di N persone che appartengono a due gruppi politici, il partito rosso e il partito azzurro. Ad ogni istante di tempo, ogni individuo, indipendentemente luno dallaltro, soggetto ad un tasso istantaneo di cambiamento r dal partito azzurro al partito rosso, ed a un tasso b dal partito rosso al partito azzurro. Sia $(X_t, t \geq 0)$ il numero di individui che al tempo t appartengono al partito azzurro.

(a) Si motivi il fatto che $(X_t, t \geq 0)$ e una catena di Markov in tempo continuo e se ne determini la Q-matrice. RISPOSTA: C' un tasso istantaneo $q_{i,i-1} = ir$, per $i = 1, \ldots, N$ e un tasso istantaneo $q_{i,i+1} = (N - i)b$, per $i = 0, \ldots, N - 1$ da cui $q_{i,i} = -ir - (N - i)b = -(Nb + (r - b)i)$ per $i = 1, \ldots, N$.

(b) Come si comporta asintoticamente il processo X? RISPOSTA: Si tratta di un processo di nascita e morte con un numero finito di stati, quindi ricorrente positivo con distribuzione invariante λ reversibile che anche distribuzione di equilibrio. Dalla condizione di bilancio dettagliato per $i = 1, \ldots, N$

$$(i - 1)r\lambda(i - 1) = (N - i)b\lambda(i)$$

si ottiene $\lambda(i) = (\frac{b}{r})^i \frac{N \times \ldots \times (N-i+1)}{i!} \lambda(0)$ da cui $\lambda(i) = (\frac{b}{r})^i \binom{N}{i} \lambda(0)$. Imponendo la normalizzazione si ha $\lambda(0) = (\frac{r}{r+b})^N$, quindi λ la legge binomiale $(N, \frac{b}{b+r})$.

(c) Si consideri ora il processo $(Y_n, n \geq 0)$, definito da $Y_n = X_{J_n}$, dove $(J_n, n \geq 0)$ e la successione dei tempi di salto del processo X. Discutere la differenza tra i comportamenti asintotici dei processi X e Y. RISPOSTA: Il processo Y un processo di nascita e morte in tempo discreto reversibile con distribuzione invariante

$$\mu(i) \propto -\lambda(i)q_{i,i} \propto (Nb + (r - b)i)(\frac{b}{r})^i \binom{N}{i}.$$

A differenza di X, per, il processo periodico, quindi la distribuzione invariante non di equilibrio.

4. Ad una fermata di autobus gli arrivi dei passeggeri seguono un processo di Poisson con intensita λ. I tempi tra il passaggio di un autobus e un altro (tempi di interarrivo) sono variabili aleatorie i.i.d. di legge esponenziale con parametro μ, indipendenti dal processo degli arrivi. Supponiamo che gli autobus siano sufficientemente grandi da far salire tutti i passeggeri in attesa. Si consideri il processo $(X_t, t \geq 0)$ che conta ad ogni tempo t il numero dei passegeri in attesa, partendo da $X_0 = 0$.

(a) Si motivi il fatto che $(X_t, t > 0)$ e una catena di Markov in tempo continuo ricorrente e se ne determini la Q-matrice. RISPOSTA: Per ipotesi $q_{i,0} = \mu$, per $i > 0$, e $q_{i,i+1} = \lambda$, per $i \geq 0$, quindi $q_{0,0} = -\lambda$ e $q_{i,i} = -(\mu + \lambda)$, per $i > 0$;

(b) Si determini la distribuzione invariante e, tramite questa, la media del tempo di primo passaggio per lo stato 0 (nessuno in attesa). RISPOSTA: La distribuzione invariante soddisfa $\pi(i) = (\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i \pi(0)$ e quindi si tratta della distribuzione geometrica $\pi(i) = (\frac{\lambda}{\lambda+\mu})^i \frac{\mu}{\lambda+\mu}$. Quindi $m_0 = E_0(T_0) = \frac{\mu}{\mu+\lambda}$.

(c) Si esprima il tempo di primo passaggio per 0 in funzione dei tempi di interarrivo degli autobus e del tempo di arrivo del primo passeggero alla fermata e si verifichi in modo diretto il calcolo del punto b). RISPOSTA: Sia A_1 il tempo di arrivo del primo passeggero e S_i i tempi di passaggio degli autobus, con $i = 1, 2, \ldots$. Allora, posto $S_0 = 0$ si ha

$$T_0 = S_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (S_{i+1} - S_i) 1_{A_1 > S_i},$$

da cui

$$E_0(T_0) = E(S_1) + \sum_{i=1}^{\infty} E\{(S_{i+1} - S_i) 1_{A_1 > S_i}\},$$

e, condizionando rispetto a $S_1, S_2, \ldots$, per $i = 1, 2, \ldots$

$$E\{(S_{i+1}-S_i)1_{A_1>S_i}\} = E\{(S_{i+1}-S_i)e^{-S_i}\} = E\{(S_{i+1}-S_i)\}E\{e^{-S_i}\} = \frac{1}{\mu}(\frac{\mu}{\mu+\lambda})^i$$

dato che S_i ha legge Gamma (i, μ). Inserendo si ha

$$E_0(T_0) = \frac{1}{\mu} \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{\mu}{\mu+\lambda})^i = \frac{\mu+\lambda}{\mu}.$$

5. Un urna contiene palline bianche e nere. Vengono effettuate estrazioni successive e sia $(X_n, n = 0, 1, \ldots)$ il numero delle palline bianche nell urna dopo n estrazioni. Se viene estratta pallina bianca, questa viene reimmessa insieme ad una pallina nera, mentre se viene estratta pallina nera, questa viene tolta insieme ad una pallina bianca. Nel caso si verifichi che $X_k = 0$, cio nessuna pallina bianca sia presente nellurna, allora non procediamo ad estrazioni, ed immettiamo direttamente nellurna una pallina bianca e una nera. In questo modo la differenza tra palline bianche e palline nere rimane costantemente uguale a quella presente al tempo 0, che chiamiamo m. Si discuta il tipo (transiente, ricorrente nulla o ricorrente positiva) della catena di Markov $(X_n, n = 0, 1, \ldots)$, in funzione del parametro $m \in Z$. RISPOSTA: Si tratta di un processo di nascita e morte a tempo discreto. Supponiamo $m \geq 0$: lo spazio di stato dato dagli interi maggiori o uguali a m, e

$$p_{i,i+1} = \frac{i}{2i - m}, p_{i,i-1} = \frac{i - m}{2i - m}, i = m, m + 1, \ldots.$$

Determiniamo la probabilit h_i di ritorno in m partendo da $i = m + 1, m + 2, \ldots$, risolvendo il sistema

$$h_i = \frac{i}{2i - m} h_{i+1} + \frac{i - m}{2i - m} h_{i-1}, i = m + 1, m + 2, \ldots,$$

avendo posto $h_m = 1$. Se $u_i = h_{i-1} - h_i$, per $i = m+1, m+2, \ldots$, abbiamo che $iu_{i+1} = (i-m)u_i$, e quindi

$$u_{i+1} = \frac{(i-m)!}{i \times \ldots \times (m+1)} u_{m+1} = \frac{1}{\binom{i}{m}} u_{m+1},$$

da cui $h_{i+1} = 1 - u_1(\sum_{j=m}^{i} \frac{1}{\binom{i}{m}}$, per $i = m, m+1, \ldots$. Se, mandando i all'infinito la serie al membro di destra converge, si pu scegliere $u_1 > 0$ in modo che $h_i > 0$, e quindi $h_i < 1$, per $i = m+1, m+2, \ldots$. In questo caso la catena transiente. Altrimenti questo non possibile e la catena ricorrente. Esaminiamo quindi il termine generico della serie: applicando la formula di Stirling $\frac{1}{\binom{i}{m}} \equiv \frac{1}{i^m}$. Ne consegue che la catena transiente per $m \geq 2$, mentre ricorrente per $m = 0, 1$. Nel caso $m = 0$ la ricorrenza (nulla) era gi nota. Evidentemente questa vale anche per $m = 1$ in base ad unse mplice argomento di confronto. Se entrambe le catene sono realizzate utilizzando una stessa successione di variabili uniformi U_n in $(0, 1)$, in modo che, quando $U_n < \frac{1}{2}$ entrambe la catene si spostino verso destra, detti T_0 il tempo di ritorno in 0 nel caso $m = 0$ e T_0^* il tempo di ritorno in 0 nel caso $m = 1$, si ha evidentemente $T_0 \leq T_0^*$ da cui, visto che il primo ha media infinita, anche il secondo la ha. Per lo stesso motivo sappiamo che la catena sar ricorrente quando $m = -l$, con $l > 0$, per cui in questo caso dobbiamo solo studiare la natura della misura invariante. Abbiamo

$$p_{i,i+1} = \frac{i}{2i+l}, p_{i,i-1} = \frac{i+l}{2i+l}, i = 0, 1, \ldots, i = 1, 2,$$

mentre come specificato nel testo $p_{0,1} = 1$. Imponendo la condizione di bilancio dettagliato si ottene

$$\pi_{i+1} = \frac{2i+l+2}{2i+l} \frac{i}{i+l+1} \pi_i,$$

per $i = 1, 2, \ldots$, mentre $\pi_1 = \frac{l+2}{l+1}\pi_0$ da cui con semplici calcoli

$$\pi_{i+1} = \frac{2i+l+2}{i+1} \frac{1}{\binom{i+l+1}{l}} \pi_0,$$

e quindi, osservando come poc'anzi che il termine moltiplicativo al membro di destra equivalente a i^{-l} si ottiene solo per $l = 1$ il termine generico di una serie divergente, che implica che la catena ricorrente nulla, mentre per $l \geq 2$ la serie convergente, quindi la catena ricorrente positiva.