Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova di Istituzioni di Algebra superiore del 10-11-2014
Prof. Paolo Papi

Esercizio 1. Per ciascuna delle seguenti affermazioni fornire una dimostrazione o un controesempio. Le algebre di Lie sono tutte complesse e di dimensione finita.

1. Un'algebra di Lie risolubile $\mathfrak{g}$ contiene una catena di sottoalgebre $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_n = \{0\}$ tale che $\mathfrak{g}_{i+1}$ è un ideale di $\mathfrak{g}_i$ e $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$ per ogni i.

2. La forma di Killing di un'algebra di Lie risolubile è identicamente nulla.

3. I pesi dominanti che sono radici sono sempre radici lunghe.

4. Un'algebra di Lie semplice non può contenere una sottoalgebra semisemplice dello stesso rango.

5. Un'algebra di Lie semplice non può contenere una sottoalgebra semplice dello stesso rango.

Esercizio 2. Calcolare la dimensione delle rappresentazioni irriducibili di un'algebra di Lie semplice di tipo F_4 di peso massimale $\lambda = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4$ e $\mu = \omega_1 + \omega_4$. (Gli ω_i sono pesi fondamentali rispetto a una base $\{\alpha_i\}$di radici semplici tale che α_1, α_2 sono lunghe.)

Esercizio 3. Dimostrare che -1 non appartiene al gruppo di Weyl di un'algebra di Lie semplice di tipo E_6.

Esercizio 4. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice. Dimostrare che $\mathfrak{g}$ ammette sottoalgebre totali e che queste sono abeliane.