Corso di Laurea Specialistica in Matematica
Prova di Istituzioni di Algebra superiore del 29-9-2014
Prof. Paolo Papi

Gli esercizi vanno svolti individualmente e consegnati per posta elettronica (papi@mat.uniroma1.it) o in formato cartaceo nella mia cassetta della posta entro le 11.30 del 1 ottobre. Per superare la prova, svolgere almeno un esercizio fornendo una soluzione dettagliata.

Esercizio 1. Sia Δ un sistema di radici simply laced in cui è fissato un sistema positivo Δ^+. Dimostrare che le seguenti proprietà per un sottoinsieme $A \subset \Delta^+$ sono equivalenti:

1. $\alpha, \beta \in A \implies \alpha + \beta \notin \Delta$.
2. $\alpha, \beta \in A \implies a\alpha + b\beta \notin \Delta$, $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$.

Esercizio 2. Sia Δ un sistema di radici in uno spazio euclideo $(E, (\ ,\ ))$. Siano α, β due radici linearmente indipendenti e $\beta - r\alpha, \ldots, \beta + q\alpha$ la α-stringa per β. Dimostrare che se $\alpha + \beta \in \Delta$ allora

$$r + 1 = \frac{q(\alpha + \beta, \alpha + \beta)}{(\beta, \beta)}.$$

Esercizio 3. Siano λ, μ pesi dominanti per un'algebra di Lie semplice $\mathfrak{g}$ tali che $\lambda - \mu$ è dominante e non zero. Dimostrare che la dimensione della rappresentazione irriducibile di peso più alto λ è maggiore della dimensione della rappresentazione irriducibile di peso più alto μ.

Esercizio 4. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semplice di tipo A_{n-1} e $\lambda = a_1\omega_1 + \ldots + a_{n-1}\omega_{n-1}$ un peso dominante espresso in termini di pesi fondamentali. Dimostrare che la dimensione della rappresentazione irriducibile di peso più alto λ è data da

$$\dim L(\lambda) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(1 + \frac{a_1 + \ldots + a_{j-1}}{j - i}\right).$$

Esercizio 5. Sia $\mathfrak{g}$ un'algebra di Lie semisemplice, $\mathfrak{h}$ una sottoalgebra di Cartan, Δ il sistema di radici. Fissiamo un sistema positivo Δ^+ e sia ρ il corrispondente vettore di Weyl. Sia W il gruppo di Weyl, e per $w \in W$ si ponga $N(w) = \{\alpha \in \Delta^+ \mid w^{-1}(\alpha) \in -\Delta^+\}$. Dimostrare che

$$w(\rho) = \rho - \sum_{\alpha \in N(w)} \alpha.$$

Dedurre che la mappa $w \mapsto N(w)$ è iniettiva.