

**Corso di Laurea Specialistica in Matematica**  
**Prova scritta di Istituzioni di Algebra superiore del 29-9-2014**  
**Prof. Paolo Papi**

NOME

COGNOME

*Il tempo a disposizione è di due ore e mezzo. Non si possono usare testi o appunti.*

**Esercizio 1.** Per ciascuna delle seguenti affermazioni fornire una dimostrazione o un controesempio.

1. Il centro di un'algebra di Lie è un ideale.
2. La forma di Killing di un'algebra di Lie nilpotente è identicamente nulla.
3. L'angolo tra due radici semplici è sempre strettamente maggiore di  $\pi/2$ .
4. Un'algebra di Lie semplice di tipo  $E_6$  contiene una sottoalgebra di tipo  $D_5$ .

**Esercizio 2.** Sia  $L$  un'algebra di Lie di dimensione finita. Enunciare il teorema PBW. Dimostrare che l'algebra involupante di  $L$  è un dominio di integrità.

**Esercizio 3.** Dimostrare che le derivazioni interne di un'algebra di Lie  $L$  sono un ideale nell'algebra di Lie delle derivazioni di  $L$ .

**Esercizio 4.** Sia  $\mathfrak{g}$  un'algebra di Lie semisemplice. Si fissi una sottoalgebra di Cartan, rispetto alla quale sia  $\Delta$  il sistema di radici. Si scelga un sistema positivo  $\Delta^+$  e siano  $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$  i pesi fondamentali. Sia infine  $\rho = 1/2 \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ . Dimostrare che  $\rho = \sum_{i=1}^n \omega_i$  e dedurre che  $\rho$  è un peso integrale fortemente dominante (cioè dominante e regolare).

**Esercizio 5.** Sia  $\Delta$  un sistema di radici di tipo  $B_4$  e  $W$  il corrispondente gruppo di Weyl. Sia  $\{\alpha_i\}_{i=1}^4$  una base di radici semplici, e sia  $\alpha_4$  la radice semplice corta. Sia  $C$  la camera fondamentale corrispondente a  $\Delta^+$ . Determinare  $W(2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 3\alpha_3 + \alpha_4) \cap \overline{C}$ .

**Esercizio 1.**

**Esercizio 2.**

### Esercizio 3.

#### Esercizio 4.

**Esercizio 5.**